

普通高等学校基础课辅导用书

# 大学数学

# 典型题解析

(高等数学分册)

主编 陈 仲  
编者 陈 仲  
范红军



南京大学出版社

责任编辑 徐 丰  
责任校对 吴 汀  
装帧设计 吴 华  
杨小慢

ISBN 7-305-04543-8/O · 362

定价:19.80元

ISBN 7-305-04543-8



9 787305 045431 >



## 内 容 简 介

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写,考虑学生考研的要求,编写时参照了教育部制定的《考研数学考试大纲》.全书含两个分册,本册是高等数学分册,内容为一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、级数和常微分方程.

本书从大学数学教材和习题集中,从高校历年期中考试、期末考试试题中,以及从历年硕士研究生入学考试题中,精选了800余例典型题,逐条详细解析,指出可能发生的错误,总结解题方法和技巧,指导学生举一反三,触类旁通.

本书可作为高等学校大学数学课程的教学参考书,习题课教材,以及考研复习用书.

## 图书在版编目(CIP)数据

大学数学典型题解析.高等数学分册/陈仲主编.一南京:南京大学出版社,2005.8

ISBN 7-305-04543-8

I. 大... II. 陈... III. 高等数学-高等学校-解题  
IV. 013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 103162 号

书 名 大学数学典型题解析(高等数学分册)

编 著 者 陈 仲 范红军

出版发行 南京大学出版社

社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093

电 话 025—83596923 025—83592317 传真 025—83328362

网 址 <http://press.nju.edu.cn>

电子邮件 [nupress1@public1.ptt.js.cn](mailto:nupress1@public1.ptt.js.cn)  
[sales@press.nju.edu.cn](mailto:sales@press.nju.edu.cn)(销售部)

印 刷 常熟华通印刷有限公司

开 本 850×1168 1/32 印张 13.125 字数 341 千

版 次 2005 年 10 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 7-305-04543-8/O·362

定 价 19.80 元

---

\* 版权所有,侵权必究

\* 凡购买南大版图书,如有印装质量问题,请与  
所购图书销售部门联系调换



## 前 言

大学数学是高等学校理、工、文科各系的公共必修基础课. 学习大学数学, 除掌握数学的基本概念、基本理论和基本方法外, 更重要的是使自己受到良好的科学训练, 得到数学思维方法、逻辑推理能力的培养, 获得一定的数学素养, 为学习专业课和后续课打下扎实的基础. 因此要学好大学数学成了每个大学生的共识.

大学数学是一门系统、严谨的学科, 内容多, 教学进度快, 致使相当多的刚进入大学的大学生感到学习困难. 我们编写这本书的宗旨就是指导大学生学好大学数学.

本书根据教育部制定的《高等数学课程教学基本要求》编写, 并参照了教育部制定的全国硕士研究生入学统一考试《数学考试大纲》. 按其内容分为两个分册(高等数学分册, 线性代数与概率统计分册), 第一分册包括一元函数微积分、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数和常微分方程; 第二分册包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的对角化、二次型、随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数学特征、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计和假设检验. 全书共 22 章, 每章分两部分, 第一部分是“基本概念与内容提要”, 列出主要概念、基本内容, 并对其中的重要内容和主要定理作详细叙述, 希望读者能掌握这些内容, 它是学好大学数学的基础. 第二部分是“典型习题与试题解析”, 编者从有关教材与习题集中, 从历年高校期中考试、期末考试试题中, 以及从历年硕士研究生入学考试题(包括统考与单独考试)中, 精选出典型题



共 800 余例,逐条详细解析,对重要题目深入分析研究,总结出解题方法和技巧,并指出可能发生的错误.这些典型题解析内容广、类型多、技巧强,是本书的核心内容.编者希望通过典型题解析,指导大学生如何解题,做到举一反三,触类旁通.各类学生可根据自己的专业要求,选学本书;文科学生和对大学数学要求较低的学生,对书中的难题可以删略.解题能力虽不是大学数学教学的全部内容,但它是学好大学数学的试金石.读者如能阅读好本书的典型题解析,定能提高分析能力,掌握解题技巧,提升应试水平.为了帮助读者检测学习效果,全书共设置 11 份阶段复习试题(书末附有试题答案与提示).

本书可供高等学校学生作为学习大学数学课程的教学参考书,可供准备考研的人员作为复习备考用书,可供高等学校教师作为习题课教材或教学参考书.

由于编者水平所限,书中缺点和错误难免,恳请读者批评、指正.

陈 仲



# 目 录

|                            |     |
|----------------------------|-----|
| <b>1 极限与连续性</b> .....      | 1   |
| 1.1 基本概念与内容提要 .....        | 1   |
| 1.2 典型习题与试题解析 .....        | 6   |
| <b>2 一元函数微分学</b> .....     | 28  |
| 2.1 基本概念与内容提要 .....        | 28  |
| 2.2 典型习题与试题解析 .....        | 36  |
| 阶段复习试题一 .....              | 100 |
| <b>3 不定积分与定积分</b> .....    | 106 |
| 3.1 基本概念与内容提要 .....        | 106 |
| 3.2 典型习题与试题解析 .....        | 111 |
| <b>4 定积分的应用与广义积分</b> ..... | 163 |
| 4.1 基本概念与内容提要 .....        | 163 |
| 4.2 典型习题与试题解析 .....        | 168 |
| 阶段复习试题二 .....              | 197 |
| <b>5 空间解析几何</b> .....      | 201 |
| 5.1 基本概念与内容提要 .....        | 201 |
| 5.2 典型习题与试题解析 .....        | 208 |
| <b>6 多元函数微分学</b> .....     | 224 |
| 6.1 基本概念与内容提要 .....        | 224 |
| 6.2 典型习题与试题解析 .....        | 229 |
| 阶段复习试题三 .....              | 256 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| <b>7 重积分</b> .....       | 262 |
| 7.1 基本概念与内容提要 .....      | 262 |
| 7.2 典型习题与试题解析 .....      | 266 |
| <b>8 曲线积分与曲面积分</b> ..... | 289 |
| 8.1 基本概念与内容提要 .....      | 289 |
| 8.2 典型习题与试题解析 .....      | 298 |
| 阶段复习试题四 .....            | 327 |
| <b>9 无穷级数</b> .....      | 334 |
| 9.1 基本概念与内容提要 .....      | 334 |
| 9.2 典型习题与试题解析 .....      | 338 |
| <b>10 常微分方程</b> .....    | 362 |
| 10.1 基本概念与内容提要 .....     | 362 |
| 10.2 典型习题与试题解析 .....     | 370 |
| 阶段复习试题五 .....            | 401 |
| <b>阶段复习试题答案与提示</b> ..... | 406 |



## 1

## 极限与连续性

## 1.1 基本概念与内容提要

## 1) 集合的概念. 集合的并、交、差运算

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\},$$

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}.$$

## 2) 一元函数基本概念

设  $I \subseteq \mathbf{R}$ , 则称映射

$$f: I \rightarrow \mathbf{R}$$

为定义在  $I$  上的一元函数. 称  $I$  为  $f$  的定义域, 记为  $D(f)$ . 全体函数值  $f(x)$  的集合称为  $f$  的值域.

利用已知条件求函数的表示式. 利用函数的解析表达式求函数的定义域.

(1) \* 函数的初等性质(奇偶性, 单调性, 有界性, 周期性). ①

(2) 反函数, \* 复合函数, 隐函数概念.

(3) \* 基本初等函数.

幂函数  $y = x^a$ , 指数函数  $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ , 对数函数  $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$ , 三角函数  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ , 反三角函数  $y = \arcsin x, y = \arccos x,$

① 本书中标“\*”的内容为重点.



$y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$  的性质及其图形.

(4) 初等函数与分段函数.

### 3) 数列与函数的极限

(1) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时恒有

$$|x_n - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 或称  $\{x_n\}$  收敛于  $A$ .

(2) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 或称  $x \rightarrow a$  时  $f(x)$  有有限极限  $A$ .

(3) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , 当  $x > M$  时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 或称  $x \rightarrow +\infty$  时  $f(x)$  有有限极限  $A$ , 简记为  $f(+\infty) = A$ .

(4) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , 当  $x < -M$  时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ , 或称  $x \rightarrow -\infty$  时  $f(x)$  有有限极限  $A$ , 简记为  $f(-\infty) = A$ .

(5) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists M > 0$ , 当  $|x| > M$  时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 或称  $x \rightarrow \infty$  时  $f(x)$  有有限极限  $A$ , 简记为  $f(\infty) = A$ .

### 4) 函数的左极限与右极限

(1) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < a - x < \delta$  时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$  (左极限为  $A$ ), 简记为  $f(a-) = A$ .

(2) 若  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < x - a < \delta$  时恒有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

其中  $A \in \mathbf{R}$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = A$  (右极限为  $A$ ), 简记为  $f(a+) = A$ .

### 5) \* 夹逼准则

若函数  $f(x), g(x), h(x)$  皆在  $x = a$  的某去心邻域  $I$  内定义, 且  $\forall x \in I$  有

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

若

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = A (\text{或 } \pm \infty),$$

则

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A (\text{或 } \pm \infty).$$

这里的极限过程改为  $x \rightarrow a \pm, x \rightarrow +\infty$ , 或  $x \rightarrow -\infty$ , 上述结论仍成立.

### 6) \* 单调有界准则

若数列  $\{x_n\}$  单调增有上界, 或单调减有下界, 则数列  $\{x_n\}$  必收敛, 即  $\exists A \in \mathbf{R}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A.$$

### 7) \* 两个重要极限

若  $x \rightarrow a$  (或  $x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$ ) 时  $\square \rightarrow 0$  ( $\square$  表示  $x$  的任一函数), 则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \square}{\square} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow a} (1 + \square)^{\frac{1}{\square}} = e.$$

### 8) \* 等价无穷小因子替换法则

若  $x \rightarrow a$  (或其他极限过程) 时  $\alpha(x)$  与  $\beta(x)$  为等价无穷小 ( $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ),  $\gamma(x)$  与  $\delta(x)$  为等价无穷小 ( $\gamma(x) \sim \delta(x)$ ), 则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)f(x)}{\gamma(x)g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)f(x)}{\delta(x)g(x)},$$

当右端极限为  $A$  时, 左端也为  $A$ ; 或右端极限不存在时, 左端也不存在.

当  $\square \rightarrow 0$  时, 有下列无穷小的等价性:

$$(1) \square \sim \sin \square \sim \arcsin \square \sim \tan \square \sim \arctan \square \sim \ln(1+\square) \sim e^{\square} - 1;$$

$$(2) (1+\square)^{\lambda} - 1 \sim \lambda \square (\lambda \in \mathbf{R});$$

$$(3) 1 - \cos \square \sim \frac{1}{2} \square^2.$$

### 9) \* 四则运算法则

在求极限的过程中,常综合运用初等变形,变量代换,四则运算法则,两个准则,两个重要极限,等价无穷小因子替换法则等各种方法.

在以后的章节中,还有运用导数定义,洛必达法则,泰勒展式,定积分定义,级数性质等求极限的方法.

### 10) 无穷小的概念和性质

若在某极限过程中( $x \rightarrow a, x \rightarrow a+, x \rightarrow a-, x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty, x \rightarrow \infty$  中任一个),变量或函数  $\alpha(x) \rightarrow 0$ ,则称  $\alpha(x)$  为该极限过程中的无穷小量,简称无穷小.在同一极限过程中的有限个无穷小的和或乘积仍为无穷小.特别的,无穷小量与有界变量的乘积仍为无穷小量.例如

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

### 11) \* 无穷小的比较

设  $x \rightarrow a$  (或  $x \rightarrow a+, \dots$ ) 时,  $\alpha, \beta$  都是无穷小,若

$$(1) \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow 0, \text{ 称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的高阶无穷小, 记为 } \alpha = o(\beta).$$

$$(2) \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow \infty, \text{ 称 } \alpha \text{ 是 } \beta \text{ 的低阶无穷小.}$$

$$(3) \frac{\alpha}{\beta} \rightarrow c (c \neq 0, c \in \mathbf{R}), \text{ 称 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 为同阶无穷小. 特别, 当 } c = 1 \text{ 时, 称 } \alpha \text{ 与 } \beta \text{ 为等价无穷小, 记为 } \alpha \sim \beta (x \rightarrow a).$$

$$(4) \frac{\alpha}{\beta^k} \rightarrow c (c \neq 0, c \in \mathbf{R}), \text{ 则以 } \beta \text{ 为基准, 称 } \alpha \text{ 为 } k \text{ 阶无穷小, 并}$$

称  $\alpha^k$  为无穷小  $\alpha$  的主部. 例如, 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^3 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2},$$

所以  $x \rightarrow 0$  时  $\tan x - \sin x$  的无穷小主部为  $\frac{1}{2}x^3$ .

### 12) 无穷大的概念、无穷大的比较

当  $x \rightarrow +\infty$  时, 下列函数无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln x, x^\alpha (\alpha > 0), x^\beta (\beta > \alpha), a^x (a > 1), x^x.$$

当  $n \rightarrow \infty$  时, 下列数列无穷大的阶数由低到高排序:

$$\ln n, n^\alpha (\alpha > 0), n^\beta (\beta > \alpha), a^n (a > 1), n^n.$$

### 13) \* 函数的连续性

设函数  $f(x)$  在  $x = a$  的某邻域内有定义, 若

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

则称  $f(x)$  在  $x = a$  连续. 若函数  $f(x)$  在区间  $I$  上每一点连续, 称  $f$  在区间  $I$  上连续. 若函数  $f(x)$  的定义域是一区间, 且  $f(x)$  在该区间上连续, 则称  $f(x)$  为连续函数, 记为  $f \in \mathcal{C}$ .

### 14) 左连续、右连续概念

设  $f(x)$  在  $x = a$  的左(右)邻域内有定义, 若

$$f(a-) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a) \quad (f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)),$$

称  $f(x)$  在  $x = a$  左(右)连续.

函数  $f(x)$  在  $x = a$  连续的充要条件是  $f(x)$  在  $x = a$  左连续且右连续.

### 15) 连续函数的运算性质

函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x = a$  皆连续, 则  $f(x) \pm g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(a) \neq 0)$  在  $x = a$  也连续.

若  $f(u)$  在  $u = u_0$  连续,  $u = \varphi(x)$  在  $x = x_0$  连续, 且  $u_0 = \varphi(x_0)$ , 则  $f(\varphi(x))$  在  $x = x_0$  连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(\varphi(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)) = f(\varphi(x_0)).$$

\* 初等函数在其定义域上连续.

### 16) \* 间断点分类

若函数  $f(x)$  在  $x = a$  不连续, 称  $x = a$  为  $f(x)$  的间断点. 间断点分为两类:

(1) 当  $f(a-)$  与  $f(a+)$  皆为有限数时, 称  $x = a$  为第一类间断点 (若  $f(a-) = f(a+)$ , 称  $x = a$  为可去型; 若  $f(a-) \neq f(a+)$ , 称  $x = a$  为跳跃型).

(2) 当  $f(a-)$  与  $f(a+)$  中至少有一个不为有限数时, 称  $x = a$  为第二类间断点 (当  $f(a-)$  与  $f(a+)$  中有一个等于  $\infty$  时,  $x = a$  为无穷型).

### 17) \* 闭区间上连续函数的性质

(1) **有界定理** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\exists K > 0$ , 使得  $|f(x)| \leq K, \forall x \in [a, b]$ .

(2) **最值定理** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 则  $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$ , 使得

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \forall x \in [a, b].$$

(3) **介值定理** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a) < f(b)$ , 则  $\forall \mu \in (f(a), f(b))$ , 必  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = \mu$ .

(4) **零点定理** 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(a)f(b) < 0$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi) = 0$  (称  $\xi$  为  $f(x)$  的零点).

## 1.2 典型习题与试题解析

**例 1.1** 求下列函数的定义域

$$(1) y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}};$$

$$(2) y = \sqrt{x^2 - x - 6} + \arcsin \frac{2x - 1}{7}.$$



解析 (1) 由  $\frac{x^2-3x+2}{x-3} \geq 0, x-3 \neq 0$  可推出

$$D(y) = \{x \mid (x-1)(x-2)(x-3) \geq 0, x \neq 3\}.$$

|       | $(-\infty, 1]$ | $[1, 2]$ | $[2, 3)$ | $(3, +\infty)$ |
|-------|----------------|----------|----------|----------------|
| $x-1$ | -              | +        | +        | +              |
| $x-2$ | -              | -        | +        | +              |
| $x-3$ | -              | -        | -        | +              |
| 乘积    | -              | +        | -        | +              |

乘积为+的区间为  $D(y)$ , 所以所求的定义域为  $[1, 2] \cup (3, +\infty)$ .

$$\begin{aligned}
 (2) \text{ 由 } \begin{cases} x^2 - x - 6 \geq 0, \\ \left| \frac{2x-1}{7} \right| \leq 1, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) \geq 0, \\ |2x-1| \leq 7, \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x \leq -2 \text{ 或 } x \geq 3, \\ -3 \leq x \leq 4, \end{cases}
 \end{aligned}$$

所以所求定义域为

$$x \in \{x \mid -3 \leq x \leq -2 \text{ 或 } 3 \leq x \leq 4\}.$$

例 1.2 设函数  $f(x)$  满足

$$3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0,$$

试求  $f(x)$ .

解析 在等式

$$3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0, \quad (1)$$

中取  $x$  为  $-\frac{1}{x}$  得

$$3f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{4}{x^2} f(x) - 7x = 0, \quad (2)$$

由(1)与(2)消去  $f\left(-\frac{1}{x}\right)$  得

$$f(x) = 4x^3 + \frac{3}{x}.$$

## 例 1.3 设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & x \geq 0, \end{cases}$$

$g(x+1) = x^2 + x + 1$ , 试求  $f(g(x)), g(f(x)), f[f(g(x))], f[g(f(x))]$ .

解析 (1) 令  $x+1 = u$ , 则

$$g(u) = (u-1)^2 + (u-1) + 1 = u^2 - u + 1,$$

故  $g(x) = x^2 - x + 1$ , 由于对一切  $x$  有  $x^2 - x + 1 > 0$ , 所以

$$f(g(x)) = g(x) = x^2 - x + 1.$$

$$\begin{aligned} (2) \quad g(f(x)) &= f^2(x) - f(x) + 1 \\ &= \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

(3) 由于  $f(g(x)) = x^2 - x + 1 > 0$ , 所以

$$f[f(g(x))] = f(g(x)) = x^2 - x + 1.$$

(4) 由于  $g(f(x)) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ , 所以

$$f[g(f(x))] = g(f(x)) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ x^2 - x + 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

例 1.4 设  $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ x+2, & x > 0, \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x, & x \geq 0, \end{cases}$

求  $g[f(x)]$ .

解析 因

$$g(u) = \begin{cases} 2-u, & u \leq 0, \\ u+2, & u > 0, \end{cases}$$

令  $u = f(x)$  得

$$g(f(x)) = \begin{cases} 2-f(x), & f(x) \leq 0, \\ f(x)+2, & f(x) > 0, \end{cases}$$

因  $f(x) \leq 0$  等价于  $x \geq 0$ , 此时  $f(x) = -x$ ;  $f(x) > 0$  等价于  $x < 0$ , 此时  $f(x) = x^2$ , 所以



$$g(f(x)) = \begin{cases} 2+x, & x \geq 0, \\ 2+x^2, & x < 0. \end{cases}$$

**例 1.5** 设  $f(x)$  是周期为  $\pi$  的奇函数, 当  $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$  时,  $f(x) = \sin x + \cos x - 1$ , 求  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  上的表达式.

**解析** 因  $f(x)$  是奇函数, 所以当  $x \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$  时,

$$f(x) = -f(-x) = -[\sin(-x) + \cos(-x) - 1]$$

$$= \sin x - \cos x + 1.$$

因  $f(x)$  是周期为  $\pi$  的周期函数, 所以当  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$  时,

$$f(x) = f(x - \pi) = \sin(x - \pi) - \cos(x - \pi) + 1$$

$$= -\sin x + \cos x + 1.$$

再利用  $f(x)$  为奇函数, 故当  $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$  时,

$$f(x) = -f(-x) = -[-\sin(-x) + \cos(-x) + 1]$$

$$= -\sin x - \cos x - 1.$$

即

$$f(x) = \begin{cases} -\sin x - \cos x - 1, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2}, \\ \sin x - \cos x + 1, & -\frac{\pi}{2} \leq x < 0, \\ \sin x + \cos x - 1, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ -\sin x + \cos x + 1, & \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$

**例 1.6** “对任意给定的  $\epsilon \in (0, 1)$ , 总存在正整数  $N$ , 当  $n \geq N$  时, 恒有  $|x_n - a| \leq 2\epsilon$ ” 是数列  $\{x_n\}$  收敛于  $a$  的( ).

- (A) 充分条件但非必要条件
- (B) 必要条件但非充分条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既非充分条件又非必要条件

**解析** 数列极限的  $\epsilon$ - $N$  语言定义为:

“ $\forall \epsilon > 0$ , 存在  $N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时有  $|x_n - A| < \epsilon$ .”

这是一个很经典的定义, 只有掌握它的实质, 才能判断有哪些地方可作非实质的改动. 因为若对某正数  $\epsilon_0$ , 结论成立, 则对大于  $\epsilon_0$  的正数其结论亦成立. 所以  $\forall \epsilon \in (0, 1)$  是可以的;  $n > N$  改为  $n \geq N$ , 只要将存在的  $N$  改为  $N+1$  就行;  $|x_n - a| < \epsilon$  改为  $|x_n - a| \leq 2\epsilon$  也是可以的, 因为  $\epsilon$  是任给的正数,  $2\epsilon$  也可认为是任意给定的正数, 它可以任意小就行. 故选(C).

**例 1.7** 用定义证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

**解析** 当  $x > 1$  时,  $2x-1 > x$ ,

$$\left| \frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{2|2x-1|} = \frac{3}{2(2x-1)} < \frac{3}{2x},$$

令

$$\frac{3}{2x} < \frac{3}{2N_1} = \epsilon,$$

则  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $N = \max(1, N_1) = \max\left(1, \frac{3}{2\epsilon}\right)$ , 当  $x > N$  时有

$$\left| \frac{x+1}{2x-1} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon.$$

**例 1.8** 用定义证明

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8.$$

解析 方法 I 当  $|x-2| < 1$  时,  $x < 3$ ,

$$\begin{aligned} |x^3 - 8| &= |x-2| |x^2 + 2x + 4| = |x-2| |(x+1)^2 + 3| \\ &\leq |x-2| (16+3) = 19|x-2|, \end{aligned}$$

令

$$19|x-2| < \epsilon \Leftrightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{19},$$

则  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \min\left(1, \frac{\epsilon}{19}\right)$ , 当  $0 < |x-2| < \delta$  时有

$$|x^3 - 8| < \epsilon.$$

方法 II 因为

$$\begin{aligned} |x^3 - 8| < \epsilon &\Leftrightarrow 8 - \epsilon < x^3 < 8 + \epsilon \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{8 - \epsilon} - 2 < x - 2 < \sqrt[3]{8 + \epsilon} - 2, \end{aligned}$$

所以  $\forall \epsilon > 0$ , 取  $\delta = \min(2 - \sqrt[3]{8 - \epsilon}, \sqrt[3]{8 + \epsilon} - 2)$ , 则当  $0 < |x-2| < \delta$  时有

$$|x^3 - 8| < \epsilon.$$

例 1.9 求证  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$  ( $A \in \mathbf{R}$ ) 的充要条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = A.$$

解析 先证必要性. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ , 由定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时有

$$|x_n - A| < \epsilon.$$

由于  $2n > n > N, 2n+1 > n > N$ , 所以

$$|x_{2n} - A| < \epsilon, \quad |x_{2n+1} - A| < \epsilon,$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = A, \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = A$ .

再证充分性. 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = A$ , 由定义,  $\forall \epsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbf{N}, N_2 \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N_1$  时有

$$|x_{2n} - A| < \epsilon;$$

当  $n > N_2$  时

$$|x_{2n+1} - A| < \epsilon.$$

取  $N = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ , 则当  $n > N$  时有

$$|x_n - A| < \epsilon,$$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

**例 1.10** 当  $x \rightarrow 0$  时, 变量  $\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$  是( ).

- (A) 无穷小 (B) 无穷大  
(C) 有界的, 但不是无穷小量 (D) 无界的, 但不是无穷大

**解析** 取  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ , 得  $f(x_n) = 4n^2\pi^2 \sin(2n\pi) = 0$ ; 取  $x_k = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ , 得

$$f(x_k) = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2.$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时  $x_n \rightarrow 0, f(x_n) \rightarrow 0$ ;  $k \rightarrow \infty$  时  $x_k \rightarrow 0, f(x_k) \rightarrow \infty$ , 所以  $f(x)$  在  $x \rightarrow 0$  时无界但不是无穷大.

**例 1.11** 求

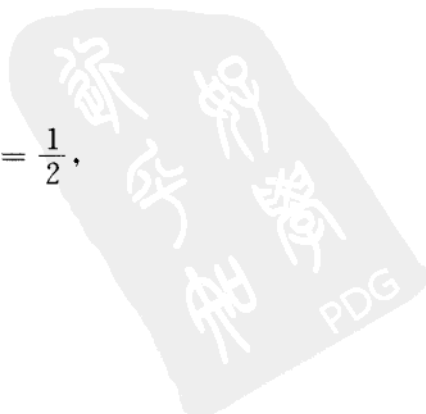
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2 + n + 1} + \frac{2}{n^2 + n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n + n} \right)$$

**解析** 应用夹逼准则, 由于

$$\begin{aligned} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} &\leq \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \\ &\leq \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1}, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n} = \frac{1}{2},$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1} = \frac{1}{2},$$

所以原式 =  $\frac{1}{2}$ .

**例 1.12** 设  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ , 求证数列  $\{x_n\}$  为单调减数列, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e.$$

**解析** 因为  $n > 2$  时, 不等式

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \leq x_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n, \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(\frac{n-1}{n}\right)^n,$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[n+1]{1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \leq \frac{n}{n+1}, \quad (2)$$

因为 1 与  $n$  个  $\frac{n-1}{n}$  这  $n+1$  个数的几何平均值  $\leq$  它们的算术平均值, 所以

$$\sqrt[n+1]{1 \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^n} \leq \frac{1 + n \cdot \frac{n-1}{n}}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

即(2)式成立, 因此(1)式成立, 即  $\{x_n\}$  单调减.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

**例 1.13** 设  $x_1 = 10, x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n} (n = 1, 2, \dots)$ , 试证数列  $\{x_n\}$  极限存在, 并求此极限.

**解析** 首先证明数列  $\{x_n\}$  单调有界, 应用单调有界准则得数列  $\{x_n\}$  收敛.

由  $x_1 = 10$  及  $x_2 = \sqrt{6+x_1} = \sqrt{16} = 4$  知  $x_1 > x_2$ . 设对某正整数  $k$  有  $x_k > x_{k+1}$ , 则有

$$x_{k+1} = \sqrt{6+x_k} > \sqrt{6+x_{k+1}} = x_{k+2},$$

故由归纳法知, 对一切正整数  $n$ , 都有

$$x_n > x_{n+1},$$

即  $\{x_n\}$  为单调减少数列. 由  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ , 显见  $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 即  $\{x_n\}$  有下界. 根据极限存在准则, 知  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在.

令  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . 对  $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$  两边取极限, 得  $a = \sqrt{6+a}$ , 从而  $a^2 - a - 6 = 0$ . 因此  $a = 3$  或  $a = -2$ . 因为  $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ , 所以  $a \geq 0$ . 舍去  $a = -2$ , 故得极限值  $a = 3$ .

**例 1.14** 设  $x_1, a$  均为正数,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$ . 求证数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

**解析** 由题给条件, 显见  $\forall n \in \mathbf{N}, x_n > 0$ , 且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a},$$

又

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{a}{a} \right) = 1,$$

所以数列  $\{x_n\}$  单调减少有下界, 因而该数列必收敛, 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ ,

在  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  中令  $n \rightarrow \infty$  得  $A = \frac{1}{2} \left( A + \frac{a}{A} \right)$ , 由此可解出  $A = \pm \sqrt{a}$ , 取其正值便得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

**例 1.15** 设  $x_1 = 1, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ , 求证数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

**解析**  $x_n > 0$ , 假设  $\{x_n\}$  收敛, 令  $x_n \rightarrow A$ , 则有  $A = \frac{1}{1+A}$ , 由此可解得  $A = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ . 下面证明  $x_n \rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ . 由于

$$|x_{n+1} - A| = \left| \frac{1-A-Ax_n}{1+x_n} \right| < A |x_n - A| \quad (\text{因 } 1-A=A^2)$$

依此类推下去得

$$\begin{aligned} \left| x_{n+1} - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \right| &< \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^2 \left| x_{n-1} - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \right| < \dots \\ &< \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \left| x_1 - \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \right| = \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

由于  $\left| \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right| < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right)^n = 0$ , 所以  $n \rightarrow \infty$  时, 上式右端极限为 0, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1).$$

**例 1.16** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)$ .

**解析** 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdots \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)}{n+2} = 2.$$

**例 1.17** 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ .

**解析** 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{3^2-1}{3^2} \cdots \frac{n^2-1}{n^2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdots \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (n+1)}{2 \cdot n} = \frac{1}{2}.$$

**例 1.18** 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} = 2$ , 其中  $a^2 + c^2 \neq 0$ , 则必有( ).

(A)  $b = 4d$

(B)  $b = -4d$

(C)  $a = 4c$

(D)  $a = -4c$

**解析** 由于  $c = 0$  时  $a \neq 0$ , 此时原式不可能成立, 故  $c \neq 0$ , 且有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \tan x + b(1 - \cos x)}{c \ln(1 - 2x) + d(1 - e^{-x^2})} \\ &= \frac{a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} + b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}}{c \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - 2x)}{x} + d \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-x^2}}{x}} \\ &= \frac{a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} + b \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x}}{c \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x}{x} + d \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x}} = \frac{a}{-2c} = 2 \quad (a^2 + c^2 \neq 0), \end{aligned}$$

于是  $a = -4c$ , 故选(D).

**例 1.19** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)}$ .

**解析** 采用等价无穷小因子代换,  $x \rightarrow 0$  时  $\ln(1 + x) \sim x$ , 又因  $1 + \cos x \rightarrow 2$ ,  $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$ , 所以

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos \frac{1}{x}}{2x} = \frac{3}{2} + 0 = \frac{3}{2}.$$

**例 1.20** 求极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{1 - \sqrt{x}}$ .

**解析** 首先由  $x \rightarrow +\infty$  时



$$2^{\frac{1}{x}} - 1 = e^{\frac{\ln 2}{x}} - 1 \sim \frac{\ln 2}{x},$$

于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} \ln 2}{1 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = -\ln 2.$$

**例 1.21** 求  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x(1 - \cos \sqrt{x})}.$

**解析** 因  $x \rightarrow 0+$  时,  $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$ ,  $1 - \cos \sqrt{x} \sim \frac{1}{2}x$ , 所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x(1 - \cos \sqrt{x})(1 + \sqrt{\cos x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \cdot \frac{1}{2}x(1 + \sqrt{\cos x})} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**例 1.22** 试求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x(1 - \cos x)}.$

**解析** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x(1 - \cos x)(\sqrt{1 + \tan x} + \sqrt{1 + \sin x})}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left( \frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{2x(1 - \cos x)} = \frac{1}{2}.$$

**例 1.23** 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right]^n.$

**解析** 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right)^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{-(n+1)} \right)^{-(n+1)} \right]^{\frac{n}{-(n+1)}} = e^{-1}.$$

**例 1.24** 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} \right)^{-n}.$

解析 记  $\frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} = t$ , 则  $n \rightarrow \infty$  时  $t \rightarrow 0$ ,

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+t)^{\frac{1}{t}}]^{-n} = \exp(-\lim_{n \rightarrow \infty} nt),$$

因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nt = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x + \frac{x^2}{2n}\right) = x,$$

故

$$\text{原式} = e^{-x}.$$

例 1.25 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a})$  ( $a > 0$ ).

解析 应用等价无穷小因子替换法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a^{\frac{1}{n+1}} (a^{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} - 1) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (a^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left[ \exp\left(\frac{\ln a}{n(n+1)}\right) - 1 \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \cdot \frac{\ln a}{n(n+1)} = \ln a. \end{aligned}$$

例 1.26 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$ .

解析 因为  $x \rightarrow 0+$  时,  $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow +\infty$ ;  $x \rightarrow 0-$  时,  $e^{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$ , 所以应左、右极限分别求之,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \frac{2e^{-\frac{1}{x}} + e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}} + 1} + \frac{\sin x}{x} \right) = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \left( \frac{2 + e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}} - \frac{\sin x}{x} \right) = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

故原式 = 1.

例 1.27 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x)$ .

解析 方法 I

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100x}{\sqrt{x^2 + 100} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{100}{-\sqrt{1 + \frac{100}{x^2}} - 1} = -50.$$

方法 II 令  $x = -\frac{1}{t}$ , 当  $x \rightarrow -\infty$  时  $t \rightarrow 0+$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0+} -\frac{1}{t} \left( \sqrt{\frac{1}{t^2} + 100} - \frac{1}{t} \right) = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{1 + 100t^2}}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{2}100t^2}{t^2} = -50. \end{aligned}$$

例 1.28 求  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos \sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$ .

解析 应用重要极限得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos \sqrt{x} - 1)^{\frac{1}{\cos \sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \pi} = \exp \left( \pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos \sqrt{x} - 1}{x} \right) \\ &= \exp \left( \pi \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{x} \right) = e^{-\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

例 1.29 求  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan^2 x}$ .

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^{\frac{1}{-\cos^2 x} \cdot \frac{-\sin^2 x}{2}} \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 x}{2} \right) = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

例 1.30 试求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$ .

解析 因  $x \rightarrow +\infty$  时  $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ , 故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e(1 + xe^{-x})^{\frac{1}{x}} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{x}{e^x} \right)^{\frac{e^x}{x} \cdot e^{-x}} = e \cdot e^0 = e.$$

例 1.31 试求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ .

解析 令  $\frac{1}{x} = t$ , 则  $x \rightarrow \infty$  时  $t \rightarrow 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0} (\sin t + \cos t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (1 + \sin t + \cos t - 1)^{\frac{1}{\sin t + \cos t - 1} \cdot \frac{\sin t + \cos t - 1}{t}} \\ &= \exp \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t + \cos t - 1}{t} \right) \\ &= \exp \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} \right) \\ &= \exp \left[ 1 + \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{2}t^2}{t} \right] = e. \end{aligned}$$

例 1.32 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[ \left( \frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$ .

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp \left( x \ln \frac{2 + \cos x}{3} \right) - 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln \left( 1 + \frac{\cos x - 1}{3} \right)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} \quad (\text{因 } e^{\square} - 1 \sim \square, \ln(1 + \square) \sim \square) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

例 1.33 设  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$ , 求常数  $a, b$  的值.

解析 因

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left( \frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x(x+1)} - a - \frac{1}{x} \right) \\ &= 1 - a = 0,\end{aligned}$$

故  $a = 1$ , 代入原式可得

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x+1} = -1.$$

**例 1.34** 设  $x \rightarrow 0+$  时  $f(x)$  与  $x$  为等价无穷小,  $f(x) \neq x$ , 求证

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0+} (f(x))^x = 1;$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(f(x))^x - x^x}{f(x) - x} = 1.$$

**解析** 由于  $f(x) \sim x$ , 所以  $f(x) = x(1+\alpha)$  ( $x \rightarrow 0$  时  $\alpha \rightarrow 0$ ), 于是

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} (f(x))^x &= \lim_{x \rightarrow 0+} x^x (1+\alpha)^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} x^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha} \cdot \alpha x} \\ &= 1 \cdot e^0 = 1, \\ \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(f(x))^x - x^x}{f(x) - x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} x^x \frac{(1+\alpha)^x - 1}{\alpha x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} x^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(1+\alpha)^x - 1}{\alpha x} \\ &= 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\alpha x}{\alpha x} = 1.\end{aligned}$$

**例 1.35** 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(1 + \sin \pi x)^n + \sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}$ , 其中  $n$  为正整数,  $-1 \leq x \leq 1$ , 试求出  $y = f(x)$  在  $[-1, 1]$  上的表达式.

**解析** 当  $-1 < x < 0$  时,  $0 \leq 1 + \sin \pi x < 1$ , 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin \pi x)^n = 0,$$

所以

$$f(x) = \sin \pi x \quad (-1 < x < 0).$$

当  $0 < x < 1$  时,  $1 < 1 + \sin \pi x \leq 2$ , 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \sin \pi x)^n = +\infty,$$

故

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{\sin \pi x}{(1 + \sin \pi x)^n}}{1 + \frac{1}{(1 + \sin \pi x)^n}} = x \quad (0 < x < 1).$$

又  $f(0) = 0$ ,

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 1^n + 0}{1^n + 1} = \frac{1}{2},$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1) \cdot 1^n + 0}{1^n + 1} = -\frac{1}{2},$$

综上所述,  $f(x)$  为分段函数:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & x = -1, \\ \sin \pi x, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1. \end{cases}$$

**例 1.36** 设函数  $f(x) = \frac{x}{a + e^{bx}}$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , 则常数  $a, b$  满足( ).

(A)  $a < 0, b < 0$

(B)  $a > 0, b > 0$

(C)  $a \leq 0, b > 0$

(D)  $a \geq 0, b < 0$

**解析** 方法 I 当  $a < 0, b \neq 0$  时  $f(x)$  有间断点

$$x = \frac{1}{b} \ln(-a);$$

而  $a = -1, b = 0$  时  $f(x)$  无定义; 当  $a \neq -1, b = 0$  时

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a+1} = \infty.$$

所以  $a < 0$ , 或  $b = 0$  皆不合题意. 当  $a \geq 0$  时, 若  $b > 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a + e^{bx}} = \infty;$$

若  $b < 0$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{a + e^{bx}} = 0.$$

所以要使  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  成立的条件是  $a \geq 0, b < 0$ , 即 (D) 成立.

**方法 II** 令  $x = -t$ , 则  $f(x) = -\frac{t}{a + e^{-t}}$ , 且  $x \rightarrow -\infty$  时,  $t \rightarrow +\infty$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t}{a + e^{-t}} = 0,$$

此式成立的充要条件是  $-b > 0$ , 即  $b < 0$ ; 因  $f(x)$  连续, 可得  $a + e^{-t} \neq 0$ , 即  $t \neq -\frac{1}{b} \ln(-a)$ , 因此有  $-a \leq 0$ , 即  $a \geq 0$ . 故选 (D).

**例 1.37** 设  $a, b, A$  皆为实数,

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad \lim_{u \rightarrow b} f(u) = A,$$

则  $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x))$  ( ).

(A) 等于  $A$       (B) 不等于  $A$       (C) 不一定等于  $A$

**解析** 本题中未给出函数  $f$  在  $b$  点连续的条件. 当  $f$  在  $b$  点连续时, (A) 成立; 当  $f$  在  $b$  点不连续时, (C) 成立. 故选 (C). 举例如下:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases} \quad f(u) = \begin{cases} 1, & u = 0, \\ 2, & u \neq 0, \end{cases}$$

当  $x \rightarrow 0$  时有

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 2,$$

由于

$$f(g(x)) = \begin{cases} 1, & g(x) = 0, \\ 2, & g(x) \neq 0, \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 1.$$

例 1.38 设函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arctan x}, & x < 0, \\ 6, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}}, & x > 0, \end{cases}$$

问  $a$  为何值时,  $f(x)$  在  $x=0$  处连续;  $a$  为何值时,  $x=0$  为  $f(x)$  的可去间断点?

解析 应用等价无穷小因子代换与洛必达法则,

$$\begin{aligned} f(0-) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\ln(1+ax^3)}{x - \arcsin x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ax^3}{x - \arcsin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{3ax^2}{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{3ax^2}{\sqrt{1-x^2} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{3ax^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -6a, \end{aligned}$$

$$f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x \sin \frac{x}{4}} = 4 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{ax} + x^2 - ax - 1}{x^2}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{ae^{ax} + 2x - a}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0+} (a^2 e^{ax} + 2) = 2a^2 + 4.$$

若  $f(x)$  在  $x=0$  连续, 则  $f(0-) = f(0+) = f(0) = 6$ , 即

$$-6a = 2a^2 + 4 = 6,$$



所以  $a = -1$ , 若  $x = 0$  为  $f(x)$  的可去间断点, 则  $f(0-) = f(0+) \neq f(0) = 6$ , 则此可解得  $a = -2$ .

于是  $a = -1$  时  $f(x)$  在  $x = 0$  连续;  $a = -2$  时,  $x = 0$  为  $f(x)$  的可去间断点.

**例 1.39** 设

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

是连续函数, 试求  $a, b$  的值.

**解析**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & |x| < 1, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{a}{x^{2n-2}} + \frac{b}{x^{2n-1}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1}{x}, & |x| > 1, \\ \frac{1+a+b}{2}, & x = 1, \\ -\frac{1-a+b}{2}, & x = -1. \end{cases}$$

故  $f(1+) = 1, f(1-) = a+b, f(-1+) = a-b, f(-1-) = -1$ , 由于  $f(x)$  在  $x = 1, -1$  处连续, 所以

$$\begin{cases} a+b=1, \\ a-b=-1, \end{cases}$$

由此即得  $a = 0, b = 1$ .

**例 1.40** 在区间  $(-\infty, +\infty)$  内, 方程  $|x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x = 0$  ( ).

(A) 无实根

(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有二个实根

(D) 有无穷多个实根

**解析** 设  $f(x) = |x|^{\frac{1}{4}} + |x|^{\frac{1}{2}} - \cos x$ , 则  $f(x)$  为偶函数, 又  $f(0) = -1$ , 下面讨论  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上零点的个数. 由于  $f(x)$  在

$(0, \pi)$  上严格增, 又  $f(\pi) = \frac{1}{4}\pi^{-\frac{3}{4}} + \frac{1}{2}\pi^{-\frac{1}{2}} > 0$ , 在  $[0, \pi]$  上应用零点定理, 得  $f(x)$  在  $(0, \pi)$  内恰有一个零点 (惟一性由  $f(x)$  的严格单调性得到). 当  $x \geq \pi$  时, 由于

$$f(x) \geq \pi^{\frac{1}{4}} + \pi^{\frac{1}{2}} - 1 > 0,$$

所以  $f(x)$  在  $[\pi, +\infty)$  上无零点, 于是  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有且仅有两个零点, 即  $f(x) = 0$  有且仅有两个实根. 故 (C) 成立.

**例 1.41** 设函数  $f(x)$  满足条件:

(i)  $a \leq f(x) \leq b, \forall x \in [a, b]$ ;

(ii)  $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, 0 \leq k < 1, x, y \in [a, b]$ . 试证明:

(1) 在  $[a, b]$  上必存在点  $\xi$ , 使得  $f(\xi) = \xi$ ;

(2) 定义数列  $\{x_n\}: x_1 \in [a, b], x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且其极限即为 (1) 中的  $\xi$ .

**解析** 任取  $x_0 \in [a, b]$ , 由  $|f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$ , 令  $x \rightarrow x_0$  得  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , 所以  $f(x)$  在  $x_0$  连续. 由  $x_0$  在  $[a, b]$  上的任意性得  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续.

令  $F(x) = f(x) - x$ , 显见  $F(x)$  在  $[a, b]$  上也连续, 且  $F(a) = f(a) - a \geq 0, F(b) = f(b) - b \leq 0$ , 应用零点定理,  $\exists \xi \in [a, b]$ , 使得  $F(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi) = \xi$ . 由

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \xi| &= |f(x_n) - f(\xi)| \leq k|x_n - \xi| \\ &= k|f(x_{n-1}) - f(\xi)| \leq k^2|x_{n-1} - \xi| \\ &\leq \dots \leq k^n|x - \xi|, \end{aligned}$$

令  $n \rightarrow +\infty$ , 由  $0 \leq k < 1$  得  $k^n \rightarrow 0$ , 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - \xi| = 0, \quad \text{即} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi.$$

**例 1.42** 设  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续,  $f(0) = 0, f(1) = 1$ , 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$f\left(\xi - \frac{1}{3}\right) = f(\xi) - \frac{1}{3}.$$

解析 令

$$g(x) = f(x) - f\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3},$$

其中  $x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ , 若  $g\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ , 即得  $\xi = \frac{2}{3} \in (0, 1)$ , 使得

$f\left(\xi - \frac{1}{3}\right) = f(\xi) - \frac{1}{3}$ , 原命题成立; 若  $g\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$ , 则由

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 g\left(\frac{k}{3}\right) &= \sum_{k=1}^3 \left(f\left(\frac{k}{3}\right) - f\left(\frac{k-1}{3}\right) - \frac{1}{3}\right) \\ &= f(1) - f(0) - 1 = 0, \end{aligned}$$

可得:  $g\left(\frac{1}{3}\right)g\left(\frac{2}{3}\right) < 0$  (或  $g\left(\frac{2}{3}\right)g(1) < 0$ ). 在区间  $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$

(或  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ ) 上, 函数  $g(x)$  连续, 应用零点定理, 必存在

$$\xi \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ (或 } \left(\frac{2}{3}, 1\right)) \subset (0, 1),$$

使得  $g(\xi) = 0$ , 即

$$f\left(\xi - \frac{1}{3}\right) = f(\xi) - \frac{1}{3}.$$



## 2

## 一元函数微分学

## 2.1 基本概念与内容提要

## 1) 导数的基本概念

(1) 若函数  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域内定义, 则  $f(x)$  在  $x=a$  的导数定义为

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(a + \square) - f(a)}{\square},$$

这里右端有有限极限. 上式也可写为

$$f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

特别有

$$f'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

欲求分段函数在分段点的导数, 必须用导数的定义求.

在几何上,  $f'(a)$  表示曲线  $y = f(x)$  在点  $(a, f(a))$  的切线的斜率, 其切线方程为

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

在力学上,  $f'(x)$  表示位移对时间的变化率, 即速度.

若函数  $f(x)$  在  $x=a$  处可导, 则  $f(x)$  在  $x=a$  处必连续, 即连续是可导的必要条件.

## (2) 左导数与右导数概念

$$(i) \text{ 左导数 } f'_-(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

$$(ii) \text{ 右导数 } f'_+(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

(iii) 左导数不同于导函数  $f'(x)$  在  $x = a$  点的左极限  $f'(a-)$ ; 右导数不同于导函数  $f'(x)$  在  $x = a$  点的右极限  $f'(a+)$ . 可以证明: 若  $f(x)$  在  $x = a$  处连续, 当  $f'(a-)$  存在时  $f'_-(a)$  也必存在, 且  $f'_-(a) = f'(a-)$ ; 当  $f'(a+)$  存在时,  $f'_+(a)$  也必存在, 且  $f'_+(a) = f'(a+)$  (参见例 3.5).

## 2) \* 微分的基本概念

若  $f(x)$  在  $x = a$  的某邻域内定义, 且存在常数  $A$  使得  $\Delta x \rightarrow 0$  时有

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = A\Delta x + o(\Delta x),$$

则称  $f(x)$  在  $x = a$  处可微.

当  $f(x)$  在  $x = a$  处可微时,  $A = f'(a)$ . 且  $f(x)$  在  $x = a$  处可微的充要条件是  $f(x)$  在  $x = a$  处可导. 此时称

$$df(x) \Big|_{x=a} = f'(a)dx$$

为函数  $f(x)$  在  $x = a$  的微分.

一阶微分具有形式不变性, 即

$$df(u) = f'(u)du = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

## 3) \* 基本初等函数的导数公式

$$(x^\lambda)' = \lambda x^{\lambda-1}, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x, \quad (\sec x)' = \sec x \tan x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x, \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arccot} x)' = \frac{-1}{1+x^2}.$$

常用的几个初等函数的导数:

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}, \quad (e^x)' = e^x, \quad (\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

#### 4) \* 求导法则

(1) 导数的四则运算法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + uv', \quad (cu)' = cu' \quad (c \in \mathbf{R}),$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

(2) 复合函数的求导法则

$$\frac{d}{dx}f(\varphi(x)) = f'(\varphi(x))\varphi'(x).$$

(3) 反函数, 隐函数与参数式函数的求导法则

(4) 取对数求导法则

$$f'(x) = f(x)(\ln |f(x)|)'$$

(5) 高阶导数, 分段函数与参数式函数的二阶导数

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right), \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad (x^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad (1 \leq k \leq n),$$

$$(x^n)^{(k)} = 0 \quad (k > n).$$

(6) 莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + C_n^n uv^{(n)}.$$

#### 5) 微分中值定理

(1) 费马定理 若函数  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域  $I$  上定义,  $f(a)$

为  $f(x)$  在  $I$  上的最值, 且  $f(x)$  在  $x=a$  可导, 则  $f'(a)=0$ .

(2) \* 罗尔定理 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $f(a)=f(b)$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi)=0$ .

(3) \* 拉格朗日中值定理 若函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(4) 柯西中值定理 若函数  $f(x)$  与  $g(x)$  皆在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 且  $g'(x) \neq 0$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

(5) 泰勒展式 若函数  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域  $I$  上  $n+1$  阶可导, 则  $\forall x \in I$  有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + R_n(x),$$

此式称为  $f(x)$  在  $x=a$  的  $n$  阶泰勒展式, 其中

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}$$

$$(\text{或 } R_n(x) = o(x-a)^n).$$

$\xi$  介于  $a$  与  $x$  之间, 这里  $R_n(x)$  称为拉格朗日余项(皮亚诺余项).

在泰勒展式中, 若  $a=0$ , 则与此对应的展式称为  $n$  阶马克劳林展式.

\* 几个初等函数的马克劳林展式: 当  $x \rightarrow 0$  时,

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + o(x^{2n+1}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + o(x^{2n}),$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \cdots - \frac{1}{n}x^n + o(x^n).$$

### 6) 未定式的极限

在某个极限过程中(如  $x \rightarrow a$ ), 若  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ , 则称  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  为  $\frac{0}{0}$  型的未定式极限. 类似地有  $\frac{\infty}{\infty}$  型,  $0 \cdot \infty$  型,  $\infty - \infty$  型以及  $1^\infty, 0^0, \infty^0$  型的未定式极限. 洛必达法则是求上述未定式极限的好方法.

#### (1) \* 洛必达法则 I.

若在某极限过程中(下面以  $x \rightarrow a$  为例) 有

- (i)  $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ ;
- (ii)  $f(x), g(x)$  在  $x = a$  的某去心邻域内可导,  $g'(x) \neq 0$ ;
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  (有限数或  $\infty$ ),

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

#### (2) \* 洛必达法则 II.

若在某极限过程中(下面以  $x \rightarrow a$  为例) 有

- (i)  $f(x) \rightarrow \infty, g(x) \rightarrow \infty$ ;
- (ii)  $f(x), g(x)$  在  $x = a$  的某去心邻域内可导,  $g'(x) \neq 0$ ;
- (iii)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$  (有限数或  $\infty$ ),

则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

#### (3) 其他型的未定式极限.





对于  $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$  等型的未定式可化为  $\frac{0}{0}$  型或  $\frac{\infty}{\infty}$  型后应用洛必达法则. 例如

$$\lim_{x \rightarrow a} u(x)^{v(x)} = \exp(\lim_{x \rightarrow a} v(x) \ln u(x)) = \exp \left[ \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln u(x)}{\frac{1}{v(x)}} \right].$$

### 7) 导数的应用

#### (1) \* 单调性.

可导函数  $f(x)$  在区间  $X$  上单调增(减)的充要条件是  $f'(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ). 若  $f'(x) > 0, x \in X$ , 则  $f(x)$  在  $X$  上严格增; 若  $f'(x) < 0, x \in X$ , 则  $f(x)$  在  $X$  上严格减.

#### (2) \* 极值.

可导函数  $f(x)$  在  $x = a$  取极大(小)值的必要条件是  $f'(a) = 0$ . 反之, 若  $f'(a) = 0$ , 且

$$f'(x)(x-a) > 0 \quad (< 0),$$

这里  $x$  在  $x = a$  的某去心邻域内变化, 则  $f(a)$  为  $f(x)$  的一个极小(大)值. 若函数  $f(x)$  在  $x = a$  二阶可导, 则由  $f'(a) = 0, f''(a) > 0$  可推得  $f(a)$  为  $f(x)$  的一个极小值; 由  $f'(a) = 0, f''(a) < 0$  可推得  $f(a)$  为  $f(x)$  的一个极大值.

#### (3) 最值.

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $x = x_i \in (a, b)$  为  $f(x)$  的不可导点,  $x = x_j \in (a, b)$  为  $f(x)$  的驻点(即  $f'(x_j) = 0$ ), 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上最大值与最小值为

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} f(x) &= \max \{ f(x_i), f(x_j), f(a), f(b) \}, \\ \min_{x \in [a, b]} f(x) &= \min \{ f(x_i), f(x_j), f(a), f(b) \}. \end{aligned}$$

#### (4) 凸性.

可导函数  $f(x)$  在区间  $X$  上向上凸(向下凸)的充要条件是

$f'(x)$  在  $X$  上单调减(单调增). 若  $f''(x) > 0, \forall x \in X$ , 则曲线  $y = f(x)$  在  $X$  上是向下凸; 若  $f''(x) < 0, \forall x \in X$ , 则曲线  $y = f(x)$  在  $X$  上是向上凸. 向上凸又称凸, 向下凸又称凹.

(5) 拐点.

二阶可导函数  $f(x)$  有拐点  $(a, f(a))$  的必要条件是  $f''(a) = 0$ . 反之, 若  $f''(a) = 0$ , 且

$$f''(x)(x-a) > 0 (< 0),$$

这里  $x$  在  $x=a$  的某去心邻域内变化, 则点  $(a, f(a))$  为函数  $f(x)$  的拐点.

(6) 渐近线.

(i) 若  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty$  或  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \infty$ , 则  $x = a$  为曲线  $y = f(x)$  的一条铅直渐近线.

(ii) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , 则  $y = A$  是曲线  $y = f(x)$  的一条水平渐近线; 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$ , 则  $y = B$  是曲线  $y = f(x)$  的一条水平渐近线, 曲线  $y = f(x)$  的水平渐近线最多有两条.

(iii) 若  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a, \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ , 则曲线  $y = f(x)$  有斜渐近线  $y = ax + b$ ; 若  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c, \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - cx) = d$ , 则曲线  $y = f(x)$  有斜渐近线  $y = cx + d$ .

曲线  $y = f(x)$  的斜渐近线最多有两条; 且其水平渐近线与斜渐近线的总条数不超过 2.

(7) 曲率.

曲线  $y = f(x)$  在点  $x = a$  的曲率为

$$K = \frac{|f''(a)|}{(1 + f'^2(a))^{3/2}}.$$

并称  $R = \frac{1}{K}$  为曲率半径.

(8) 函数作图. 利用导数描绘函数  $y = f(x)$  图形的步骤为:

- (i) 确定定义域、奇偶性、周期性与连续性;
- (ii) 求  $f'(x)$ , 确定驻点与不可导点, 求出单调区间和极值;
- (iii) 求  $f''(x)$ , 确定凹凸区间和拐点;
- (iv) 求渐近线;
- (v) 绘草图.
- (9) 经济上的应用(仅适用于文科学生).

(i) 弹性. 若  $f(x)$  可导, 且  $f(x) > 0$ , 则  $f(x)$  的弹性为

$$\frac{E f(x)}{E x} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x}{f(x)} \frac{d f(x)}{d x}.$$

若  $Q$  为生产量或销售量,  $p$  为价格, 称函数  $Q=Q(p)$  (或其反函数  $p=p(Q)$ ) 为需求函数. 需求函数的弹性称为需求弹性, 习惯上用

$$-\frac{EQ}{Ep} = -\frac{p}{Q(p)} \frac{dQ(p)}{dp}$$

计算需求弹性.

(ii) 边际函数. 若  $C(x)$  为成本函数, 则  $C'(x)$  称为边际成本; 若  $R(x)$  为收益函数, 则  $R'(x)$  称为边际收益;  $L(x)$  为利润函数, 即  $L'(x)$  称为边际利润.

(iii) 利润公式.  $L(x) = R(x) - C(x)$ .

(iv) 复利公式. 设  $R_0$  表示现值,  $R$  表示未来值,  $r$  为年利率, 则有离散型复利公式

$$R = R_0(1+r)^t,$$

其中  $t$  (单位: 年) 表示时间. 若每年计利次数  $n \rightarrow \infty$ , 则有连续复利公式

$$R = R_0 e^{rt}.$$

上述两个复利公式可分别改写为

$$R_0 = R(1+r)^{-t} \quad \text{与} \quad R_0 = R e^{-rt},$$

称为贴现公式, 它将  $t$  年末的资金转化为现值.

## 2.2 典型习题与试题解析

例 2.1 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$$

其中  $g(x)$  为有界函数, 则  $f(x)$  在  $x=0$  处( ).

- (A) 极限不存在 (B) 极限存在, 但不连续  
(C) 连续, 但不可导 (D) 可导

解析  $f(x)$  为分段函数, 由于  $f(0)=0$ ,

$$\begin{aligned} f(0+) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}} = 0, \\ f(0-) &= \lim_{x \rightarrow 0-} x^2 g(x) = 0 \quad (\text{因 } g(x) \text{ 有界}), \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $x=0$  处连续. 又因

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos x}{x \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x \sqrt{x}} = 0, \\ f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2 g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} x g(x) = 0, \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $x=0$  处可导,  $f'(0)=0$ , 于是只有 (D) 成立.

例 2.2 设  $f(0)=0$ , 则  $f(x)$  在  $x=0$  可导的充要条件为 ( ).

- (A)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h)$  存在 (B)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h)$  存在  
(C)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h)$  存在 (D)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)]$  存在

解析 因  $f(0)=0$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  可导的充要条件是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0) \quad (f'(0) \in \mathbf{R}). \quad (1)$$

(A)是(1)成立的必要条件,但不是充分条件.若(1)成立,则

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(1 - \cos h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h^2} \cdot \frac{f(1 - \cos h)}{1 - \cos h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} h^2}{h^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} f'_+(0).\end{aligned}$$

若(A)成立,因  $1 - \cos h > 0$ ,由此只能推出  $f'_+(0)$  存在,而不能推出  $f'_-(0)$  存在,故不能推出(1)一定成立.

(B)是(1)成立的充要条件.因为

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0 \pm} \frac{1}{h} f(1 - e^h) &= \lim_{h \rightarrow 0 \pm} \frac{1 - e^h}{h} \cdot \frac{f(1 - e^h)}{1 - e^h} \\ &= - \lim_{x \rightarrow 0 \mp} \frac{f(x)}{x} = -f'(0),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} f(1 - e^h) = -f'(0).$$

(C)是(1)成立的必要条件,但不是充分条件.若(1)成立,则

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} f(h - \sin h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h - \sin h}{h^2} \cdot \frac{f(h - \sin h)}{h - \sin h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{2h} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 \cdot f'(0) = 0.\end{aligned}$$

若(C)成立,由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h)}{h - \sin h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h - \sin h)}{h^2} \cdot \frac{h^2}{h - \sin h},$$

而  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2}{h - \sin h} = \infty$ ,所以上式左端极限不一定存在,即(1)不一定成立.

(D)是(1)成立的必要条件,但不是充分条件.若(1)成立,则

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(2h) - f(h)] &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= 2f'(0) - f'(0) = f'(0).\end{aligned}$$

若(D)成立,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(h)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h},$$

这是因为右端的两个极限不一定存在,所以推不出(1)成立. 故选(B).

**例 2.3** 设  $f(x)$  在  $x=a$  的某邻域上定义,可导,且  $f(a)=0$ ,求证  $|f(x)|$  在  $x=a$  可导的充要条件是  $f'(a)=0$ .

**解析** 记  $F(x)=|f(x)|$ ,则  $F(x)$  在  $x=a$  可导的充要条件是  $F'_-(a)=F'_+(a)$ . 由于  $f'_-(a)=f'_+(a)=f'(a)$  且

$$\begin{aligned} F'_-(a) &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{|f(x)|}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = - \left| \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \\ &= -|f'_-(a)| = -|f'(a)|, \\ F'_+(a) &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{F(x) - F(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{|f(x)|}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} = \left| \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| \\ &= |f'_+(a)| = |f'(a)|, \end{aligned}$$

故  $F(x)$  在  $x=a$  可导  $\Leftrightarrow -|f'(a)| = |f'(a)| \Leftrightarrow f'(a)=0$ .

**例 2.4** 设  $f(x)$  可导,  $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ ,  $F(x)$  在  $x=0$  处可导,求证  $f(0)=0$ .

**解析** 由于  $F(x)$  在  $x=0$  可导  $\Leftrightarrow F'_-(0)=F'_+(0)$ , 而

$$\begin{aligned} F'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)(1+|\sin x|) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)|\sin x|}{x} = f'(0) - f(0), \\ F'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)(1+|\sin x|) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)|\sin x|}{x} = f'(0) + f(0), \end{aligned}$$

由  $F'_-(0)=F'_+(0)$  推得  $f(0)=0$ .

**例 2.5** 已知  $f(x)$  是周期为 5 的连续函数, 它在  $x=0$  的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中  $\alpha(x)$  (当  $x \rightarrow 0$  时) 是  $x$  的高阶无穷小, 且  $f(x)$  在  $x=1$  处可导, 求曲线  $y=f(x)$  在点  $(6, f(6))$  处的切线方程.

**解析** 由题给条件易得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{8x}{\sin x} + \frac{\alpha(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sin x} \right] = 8.$$

再应用导数的定义,  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\square)-f(1)}{\square}$ , 从上式可求出  $f'(1)$ .

首先由

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)] = \lim_{x \rightarrow 0} [8x+\alpha(x)],$$

得  $f(1)-3f(1)=0$ , 故  $f(1)=0$ . 设  $\sin x=t$ , 则得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t)-f(1)}{t} + 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1-t)-f(1)}{-t} = 4f'(1), \end{aligned}$$

所以  $f'(1)=2$ . 由于  $f(x+5)=f(x)$ , 所以  $f(6)=f(1)=0$ , 又

$$f'(6) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(6+x)-f(6)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = f'(1) = 2,$$

故所求的切线方程为

$$y=2(x-6),$$

即

$$2x-y-12=0.$$

**例 2.6** 求函数  $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$  的不可导点.

**解析** 这里  $f(x)$  为两项的乘积, 第一项

$$u(x)=x^2-x-2$$



在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导;第二项

$$v(x) = |x^3 - x|$$

除在点  $x=0, -1, 1$  处不可导外处处可导. 于是  $f(x)$  除去三点  $x=0, -1, 1$  处可能不可导外处处可导. 下面应用导数的定义考察  $f(x)$  在这三点的可导性.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^2 - x - 2)|x^3 - x| - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - x - 2)(1 - x^2) \frac{|x|}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}, \end{aligned}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$  不存在(左、右极限分别为  $-1$  与  $1$ ), 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 - x - 2)|x^3 - x| - 0}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x - 2)x(x-1) \frac{|x+1|}{x+1}, \end{aligned}$$

由于  $x \rightarrow -1$  时  $(x^2 - x - 2)x(x-1) \rightarrow 0$ , 而  $\frac{|x+1|}{x+1}$  为有界函数, 所以上式右端为  $0$ , 于是  $f'(-1) = 0$ .

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - x - 2)|x^3 - x| - 0}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - x - 2)x(x+1) \frac{|x-1|}{x-1} \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}, \end{aligned}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$  不存在(左、右极限分别为  $-1$  与  $1$ ), 所以  $f(x)$  在  $x=1$  处不可导.

**评注** 由上述讨论, 我们可总结归纳为一个简单的判别方法: 若  $f(x) = u(x)v(x)$ ,  $u(x)$  处处可导,  $v(x)$  在  $x=x_0$  不可导, 但其左、右



导数皆存在,此时若  $u(x_0) \neq 0$ , 则  $f(x)$  在  $x=x_0$  处不可导; 若  $u(x_0)=0$ , 则  $f(x)$  在  $x=x_0$  处可导. 在本题中  $u(0)=-2$ ,  $u(-1)=0$ ,  $u(1)=-2$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$ , 与  $x=1$  处不可导, 在  $x=-1$  处可导.

**例 2.7** 求常数  $A, B$  之值, 使函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x + 2Ae^x, & x < 0, \\ 9\arctan x + 2B(x-1)^3, & x \geq 0. \end{cases}$$

在  $x=0$  处一阶可导.

**解析** 因连续是可导的必要条件, 所以

$$f(0-) = f(0+) = f(0),$$

而  $f(0-) = 2A$ ,  $f(0+) = -2B$ ,  $f(0) = -2B$ , 故  $A = -B$ .

由于  $f(x)$  在  $x=0$  可导  $\Leftrightarrow f'_-(0) = f'_+(0)$ , 而

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x + 2Ae^x + 2B}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x + 2A(e^x - 1)}{x} = 1 + 2A, \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{9\arctan x + 2B(x-1)^3 + 2B}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{9\arctan x - 2B[(1-x)^3 - 1]}{x} \\ &= 9 - 2B \cdot (-3) = 9 + 6B, \end{aligned}$$

可得  $1 + 2A = 9 + 6A$ , 于是  $A = 1, B = -1$ .

**例 2.8** 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} - 1, & x \leq 0, \\ \ln(1+x), & x > 0, \end{cases}$$

讨论  $f(x)$  在  $x=0$  的连续性与可导性.

**解析** 考虑  $f(x)$  的连续性须从左、右极限入手, 因

$$f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1+x) = 0,$$

$$f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (e^{-x^2} - 1) = 0,$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ , 而  $f(0) = 0$ , 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处连续.

分段函数的可导性, 亦须从定义入手. 因

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x) - 0}{x} = 1,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} = 0,$$

所以  $f'_+(0) \neq f'_-(0)$ , 于是  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

**评注** 讨论函数  $f(x)$  在  $x=0$  的可导性时, 下述解法是不对的:  
因

$$f'(x) = \begin{cases} -2xe^{-x^2}, & x < 0, \\ \frac{1}{1+x}, & x > 0, \end{cases}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{1+x} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0-} (-2xe^{-x^2}) = 0$ , 两者不相等, 所以  $f(x)$  在  $x=0$  处不可导.

先求导数, 再求极限, 这是讨论  $f'(x)$  的连续性所用的方法.

**例 2.9** 设  $y = \cos(x^2) \cdot \sin^2 \frac{1}{x}$ , 求  $y'$ .

**解析** 记  $u(x) = \cos(x^2)$ ,  $v(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$ , 则

$$u'(x) = -2x \sin(x^2), \quad v'(x) = -\frac{1}{x^2} 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x},$$

所以

$$\begin{aligned} y' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= -2x \sin(x^2) \cdot \sin^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{2}{x} \cdot \cos(x^2). \end{aligned}$$

**例 2.10** 设  $y = e^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \sin \frac{1}{x}$ , 求  $y'$ .

解析 记  $u = e^{\tan \frac{1}{x}}$ ,  $v = \sin \frac{1}{x}$ , 则

$$u' = e^{\tan \frac{1}{x}} \left( \tan \frac{1}{x} \right)' = e^{\tan \frac{1}{x}} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right),$$

$$v' = \cos \frac{1}{x} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x},$$

于是

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv' = -\frac{1}{x^2} e^{\tan \frac{1}{x}} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} + e^{\tan \frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \cos \frac{1}{x} \\ &= -\frac{1}{x^2} e^{\tan \frac{1}{x}} \left( \sec^2 \frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

例 2.11 设  $y = \log_x e + x^{\frac{1}{x}}$ , 求  $y'$ .

解析  $y = \frac{1}{\ln x} + x^{\frac{1}{x}}$ , 则

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} + x^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{x} \ln x \right)' = -\frac{1}{x \ln^2 x} + x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

例 2.12 设  $y = x^{\sin \frac{1}{x}}$ , 求  $y'$ .

解析 应用取对数求导法则,

$$\begin{aligned} y' &= x^{\sin \frac{1}{x}} \left( \left( \sin \frac{1}{x} \right) \ln x \right)' \\ &= x^{\sin \frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \left( \cos \frac{1}{x} \right) \ln x + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

例 2.13 设函数  $y = y(x)$  由方程  $e^{x+y} + \cos(xy) = 0$  确定, 求

$$\frac{dy}{dx}.$$

解析 原式两边对  $x$  求导得

$$e^{x+y} (1 + y') - \sin(xy) \cdot (y + xy') = 0,$$

就  $y'$  解出即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \sin(xy) - e^{x+y}}{e^{x+y} - x \sin(xy)}.$$

**例 2.14** 设函数  $y=y(x)$  由方程  $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$  确定, 求  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ .

**解析** 在原方程中令  $x=0$ , 得  $\ln y=0$ , 故  $y=1$ . 应用隐函数求导法则, 方程两边对  $x$  求导得

$$\frac{1}{x^2+y}(2x+y')=3x^2y+x^3y'+\cos x, \quad (1)$$

令  $x=0, y=1$ , 得  $y'(0)=1$ .

**评注** 本题是求  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$ , 所以在方程(1)两边将  $x=0$  与  $y=1$  代入后求解较方便. 若由(1)先解出  $\frac{dy}{dx}$ , 再将  $x=0, y=1$  代入求  $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$  比较繁琐.

**例 2.15** 设

$$f(x)=\begin{cases} \frac{xe^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

试求  $f'(0-), f'(0+)$ .

**解析**  $x \neq 0$  时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)(1+e^{\frac{1}{x}}) + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}+e^{\frac{1}{x}}\right)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}, \end{aligned}$$

$$f'(0-)=\lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u(1-u+e^u)}{(1+e^u)^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{u \rightarrow -\infty} (-ue^u) \cdot \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{(1+e^u)^2} + \lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{e^u}{1+e^u} \\
 &= -\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{u}{e^{-u}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} -\lim_{u \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{-u}} = 0, \\
 f'(0+) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) \stackrel{\frac{1}{x}=u}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u(1-u+e^u)}{(1+e^u)^2} \\
 &= 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{ue^u}{(1+e^u)^2} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1+u}{2(1+e^u)} \\
 &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} 1 - \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{2e^u} = 1 - 0 = 1.
 \end{aligned}$$

例 2.16 设函数

$$f(x) = \arctan \frac{\sqrt{x^2+2}}{x} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{x^2+2}-x}{\sqrt{x^2+2}+x},$$

求  $f'(x)$ .

解析 记  $u(x) = \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}$ , 则

$$\begin{aligned}
 f &= \arctan u - \frac{1}{2} \ln \frac{u-1}{u+1} \\
 &= \arctan u + \frac{1}{2} \ln(u+1) - \frac{1}{2} \ln(u-1),
 \end{aligned}$$

由于

$$u'(x) = \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} = \frac{-2}{x^2 \sqrt{x^2+2}},$$

所以

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} f(x) &= f'(u) u' = \left( \frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} \right) u' \\
 &= \left( \frac{1}{1+u^2} + \frac{1}{1-u^2} \right) u' = \frac{2}{1-u^4} u'
 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{1 - \frac{(x^2+2)^2}{x^4}} \cdot \frac{-2}{x^2 \sqrt{x^2+2}} = \frac{x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}.$$

**评注** 本题若将  $f(x)$  直接对  $x$  求导是繁复的, 上述解析中引进中间变量  $u(x)$  后使用复合函数求导法则, 大大简化了计算过程.

**例 2.17** 设  $y=y(x)$  由  $\begin{cases} x=\arctan t, \\ 2y-ty^2+e^t=5 \end{cases}$  所确定, 求  $\frac{dy}{dx}$ .

**解析 方法 I** 这里  $x=x(t)$  为显函数, 而  $y(t)$  由隐函数方程确定.  $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$  易得, 下面用隐函数求导法则求  $\frac{dy}{dt}$ , 将隐式方程两边对  $t$  求导得

$$2 \frac{dy}{dt} - y^2 - 2ty \frac{dy}{dt} + e^t = 0,$$

于是

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - e^t}{2(1-ty)},$$

因而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{(y^2 - e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$$

**方法 II** 将  $t=\tan x$  代入第二式得隐式方程

$$2y - \tan x \cdot y^2 + e^{\tan x} = 5,$$

两边对  $x$  求导得

$$2y' - \sec^2 x \cdot y^2 - \tan x \cdot 2yy' + \sec^2 x \cdot e^{\tan x} = 0,$$

就  $y'$  解出得

$$y' = \frac{\sec^2 x \cdot (y^2 - e^{\tan x})}{2 - 2y \tan x}.$$



例 2.18 设

$$f(x) = \begin{cases} x \arctan x \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

试讨论  $f'(x)$  在  $x=0$  处的连续性.

解析 当  $x \neq 0$  时

$$f'(x) = \arctan x \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4},$$

$x=0$  时

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan \frac{1}{x^2}}{x} = \frac{\pi}{2},$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \arctan \frac{1}{x^2} - \frac{2x^2}{1+x^4} \right) = \frac{\pi}{2} = f'(0),$$

所以  $f'(x)$  在  $x=0$  处连续.

例 2.19 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - \cos x}{x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

其中  $g(x)$  具有二阶连续导函数, 且  $g(0)=1$ ,

(1) 确定  $a$  的值, 使  $f(x)$  在  $x=0$  连续;

(2) 求  $f'(x)$ ;

(3) 讨论  $f'(x)$  在  $x=0$  的连续性.

$$\begin{aligned} \text{解析 (1)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (g'(x) + \sin x) = g'(0), \end{aligned}$$

故当  $a=g'(0)$  时,  $f(x)$  在  $x=0$  连续.

(2) 当  $x \neq 0$  时,

$$f'(x) = \frac{x(g'(x) + \sin x) - (g(x) - \cos x)}{x^2},$$

而

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{g(x) - \cos x}{x} - g'(0) \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - \cos x - xg'(0)}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x) + \sin x - g'(0)}{2x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g''(x) + \cos x}{2} = \frac{1}{2}(g''(0) + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(g'(x) + \sin x) - (g(x) - \cos x)}{x^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(g''(x) + \cos x)}{2x} \\ &= \frac{1}{2}(g''(0) + 1) = f'(0), \end{aligned}$$

所以  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续.

**例 2.20** 设  $a$  和  $b$  为实常数,  $b < 0$ , 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^b), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

回答下列问题, 并简单说明理由:

- (1) 在什么情况下,  $f(x)$  不是连续函数?
- (2) 在什么情况下,  $f(x)$  连续, 但不可导?
- (3) 在什么情况下,  $f(x)$  可导, 但  $f'(x)$  在  $[-1, 1]$  上无界?
- (4) 在什么情况下,  $f(x)$  可导,  $f'(x)$  在  $[-1, 1]$  上有界, 但  $f'(x)$  不连续?
- (5) 在什么情况下,  $f(x)$  连续可导?

**解析** (1) 当  $a \leq 0$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)$  不存在, 故  $a \leq 0$  时  $f(x)$  不是连续函数.



(2) 当  $0 < a \leq 1$  时,  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0 = f(0)$ , 故此时  $f(x)$  是连续函数, 但因  $a-1 \leq 0$ , 故

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{a-1} \sin(x^b),$$

右端极限不存在, 因此  $0 < a \leq 1$  时  $f(x)$  不可导.

(3) 当  $1 < a < 1-b$  时,

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x^{a-1} \sin(x^b) = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

所以  $f'(0) = 0$ ,  $f(x)$  可导, 但

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (ax^{a-1} \sin(x^b) + bx^{a+b-1} \cos(x^b)) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} bx^{a+b-1} \cos(x^b), \end{aligned}$$

由于  $a+b-1 < 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} x^{a+b-1} = \infty$ , 所以上式右端无界, 因此  $1 < a < 1-b$  时  $f(x)$  可导, 但  $f'(x)$  无界.

(4) 当  $a = 1-b$  时, 由(3)得  $f'(0) = 0$ , 又

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} b \cos(x^b) \quad (b < 0),$$

此式右端在  $[-1, 1]$  上显见有界, 但极限不存在, 所以  $a = 1-b$  时,  $f(x)$  可导,  $f'(x)$  在  $[-1, 1]$  上有界, 但  $f'(x)$  不连续.

(5) 当  $a > 1-b$  时, 由(3)得  $f'(0) = 0$ , 又

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} bx^{a+b-1} \cos(x^b) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) &= 0, \end{aligned}$$

故  $a > 1-b$  时,  $f'(x)$  连续, 即  $f(x)$  连续可导.

**例 2.21** 设函数  $y = y(x)$  由方程  $xe^{f(y)} = e^y$  确定, 其中  $f$  具有二阶导数, 且  $f' \neq 1$ , 求  $\frac{d^2 y}{dx^2}$ .

**解析** 方法 I 方程两边取对数, 得

$$\ln x + f(y) = y,$$

对  $x$  求导, 得

$$\frac{1}{x} + f'(y)y' = y',$$

从而

$$y' = \frac{1}{x(1-f'(y))},$$

$$y'' = -\frac{1-f'(y)-xf''(y)y'}{x^2(1-f'(y))^2} = -\frac{(1-f'(y))^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

**方法 II** 方程两边对  $x$  求导, 得

$$e^{f(y)} + xe^{f(y)}f'(y)y' = e^y y',$$

从而

$$y' = \frac{e^{f(y)}}{e^y - xe^{f(y)}f''(y)} = \frac{1}{x(1-f'(y))},$$

$y''$  的求法同方法 I.

**例 2.22** 设函数  $y=y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x=t-\ln(1+t), \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$  所确

定, 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

**解析** 应用参数式函数求导法则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2+2t}{1-\frac{1}{1+t}} = \frac{t(1+t)(3t+2)}{t} = 3t^2+5t+2,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t+5}{1-\frac{1}{1+t}} = \frac{(6t+5)(1+t)}{t}.$$

**例 2.23** 对于函数

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+bx+c, & x < 0, \\ \ln(1+x), & x \geq 0, \end{cases}$$

解平能  
PDG

问选取怎样的系数  $a, b, c$ , 才能使得  $f(x)$  处处具有一阶连续导数, 但在  $x=0$  处却不存在二阶导数.

**解析** 由  $f(x)$  在  $x=0$  连续得  $f(0-)=f(0+)=f(0)$ , 即  $c=0$ ; 由  $f(x)$  在  $x=0$  可导得  $f'_-(0)=f'_+(0)=f'(0)$ , 而

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{ax^2 + bx}{x} = b,$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

故  $f'(0)=b=1$ ; 由  $f'(x)$  在  $x=0$  连续得  $f'(0-)=f'(0+)=f'(0)$ , 而

$$f'(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} (ax^2 + bx + c)' = b,$$

$$f'(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} (\ln(1+x))' = 1,$$

故  $b=1$ , 由于

$$f''_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2ax + b - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2ax + 1 - 1}{x} = 2a,$$

$$f''_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-1}{1+x} = -1,$$

所以当  $2a \neq -1$ , 即  $a \neq -\frac{1}{2}$  时  $f''(0)$  不存在. 综上所述, 当  $a \neq -\frac{1}{2}, b=1, c=0$  时  $f(x)$  具有一阶连续导数, 但在  $x=0$  不存在二阶导数.

**例 2.24** 设函数  $f(x)$  二阶可导,  $f'(x) \neq 0$ , 其反函数  $f^{-1}(x)$  存在, 求证  $f^{-1}(x)$  二阶可导, 并求  $\frac{d^2}{dx^2} f^{-1}(x)$ .

**解析**  $x=f(y)$  的反函数为  $y=f^{-1}(x)$ , 则

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d^2f^{-1}(x)}{dx^2} = \left( \frac{d}{dy} \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \right) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{-f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^2} \cdot \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \\ &= \frac{-f''(f^{-1}(x))}{(f'(f^{-1}(x)))^3}.\end{aligned}$$

**例 2.25** 设  $y=x^3 \sin x$ , 求  $y^{(10)}(0)$ .

**解析** **方法 I** 应用莱布尼兹公式, 并注意到幂函数  $x^n$  在  $x=0$  处等于 0 ( $n \geq 1$ ), 于是

$$\begin{aligned}y^{(10)}(0) &= C_{10}^3 (x^3)^{(7)} (\sin x)^{(3)} \Big|_{x=0} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} \cdot 3! \sin\left(x + \frac{7}{2}\pi\right) \Big|_{x=0} = -720.\end{aligned}$$

**方法 II** 应用  $\sin x$  的马克劳林展式,

$$\begin{aligned}y &= x^3 \left( x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + o(x^8) \right) \\ &= x^4 - \frac{1}{3!}x^7 + \frac{1}{5!}x^8 - \frac{1}{7!}x^{10} + o(x^{11}),\end{aligned}$$

于是

$$y^{(10)}(0) = -\frac{1}{7!} (x^{10})^{(10)} = -\frac{10!}{7!}.$$

**例 2.26** 求函数  $f(x)=x^2 \ln(1+x)$  在  $x=0$  处的  $n$  阶导数  $f^{(n)}(0)$  ( $n \geq 3$ ).

**解析** **方法 I** 由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^{(0)}v^{(n)},$$

及

$$[\ln(1+x)]^{(k)} = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \text{ 为正整数}),$$

取  $u(x) = \ln(1+x)$ ,  $v(x) = x^2$ , 得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= x^2 \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} + 2nx \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} + \\ &\quad n(n-1) \cdot \frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}, \end{aligned}$$

所以

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-3}n(n-1)(n-3)! = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

**方法 II** 由麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n),$$

及

$$\begin{aligned} x^2 \ln(1+x) &= x^2 \left[ x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-2}}{n-2} + o(x^{n-2}) \right] \\ &= x^3 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n-2} + o(x^n), \end{aligned}$$

比较  $x^n$  的系数得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n-2},$$

所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}.$$

**例 2.27** 设  $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$  ( $n \geq 2$ ), 试求  $f'(0)$ ,  $f^{(n)}(0)$ .

**解析** 因

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)(x-2)\cdots(x-n) + x(x-2)(x-3)\cdots \\ &\quad (x-n) + \cdots + x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1), \end{aligned}$$

令  $x=0$  得

$$f'(0) = (-1)(-2)(-3)\cdots(-n) = (-1)^n n!.$$

由于  $f(x)$  的展开式中  $x$  的最高幂项为  $x^{n+1}$ ,  $x$  的次高幂项为  $-\frac{n(n+1)}{2}x^n$ , 又因  $(x^{n+1})^{(n)} = (n+1)!x$ ,  $(x^n)^{(n)} = n!$ ,  $(x^{n-1})^{(n)} = 0, \dots, x^{(n)} = 0$ , 所以

$$f^{(n)}(0) = -\frac{n(n+1)}{2}n!$$

**例 2.28** 设  $f(x) = \frac{x^2}{1-x^2}$ , 求  $f^{(n)}(0)$ .

**解析** 方法 I 由于

$$f(x) = -1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x+1},$$

并应用  $\frac{1}{x}$  的高阶导数公式

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}},$$

于是

$$f^{(n)}(x) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{1}{2} \cdot n! + \frac{1}{2}(-1)^n n! = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)n!$$

$$= \begin{cases} n!, & \text{当 } n \text{ 为偶数时,} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数时.} \end{cases}$$

**方法 II** 应用幂级数展式(参见 9.1.6)),

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{1-x^2} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \\ &= x^2 + x^4 + x^6 + \cdots + x^{2n} + x^{2n+2} + \cdots \quad (|x| < 1), \end{aligned}$$

由于  $x^{2n-1}$  的系数为 0,  $x^{2n}$  的系数为 1, 于是

$$f^{(2n-1)}(0) = (2n-1)! \cdot 0 = 0,$$

$$f^{(2n)}(0) = (2n)!.$$

**例 2.29** 设函数  $f(x)$  具有任意阶导数, 且  $f'(x) = (f(x))^2$ , 当  $n$  为大于 2 的正整数时, 试求  $f^{(n)}(x)$ .

**解析** 将原式  $f'(x) = (f(x))^2$  两边求导得

$$f''(x) = 2f(x)f'(x) = 2(f(x))^3,$$

两边再求导得

$$f'''(x) = 3!(f(x))^2 \cdot f'(x) = 3!(f(x))^4,$$

归纳设

$$f^{(n-1)}(x) = (n-1)!(f(x))^n,$$

两边求导得

$$f^{(n)}(x) = n!(f(x))^{n-1} \cdot f'(x) = n!(f(x))^{n+1},$$

因此此式  $\forall n \in \mathbf{N}$  成立.

**例 2.30** 设  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ , 求  $f^{(n)}(x)$ .

**解析** 
$$\begin{aligned} f'(x) &= 6\sin^5 x \cos x - 6\cos^5 x \sin x \\ &= 6\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) \\ &= -3\sin 2x \cos 2x = -\frac{3}{2}\sin 4x, \end{aligned}$$

$$f''(x) = -\frac{3}{2} \cdot 4\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right),$$

应用  $\sin x$  的高阶导数公式即得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= -\frac{3}{2} \cdot 4^{n-1} \sin\left(4x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= 6 \cdot 4^{n-2} \cos\left(4x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

**例 2.31** 设  $y = e^x \sin x$ , 试求  $y^{(n)}$ .

**解析**

$$y' = e^x (\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

归纳设

$$y^{(n-1)} = 2^{\frac{n-1}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right),$$

则两边求导得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= 2^{\frac{n-1}{2}} e^x \left[ \sin\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right) + \cos\left(x + \frac{n-1}{4}\pi\right) \right] \\ &= 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(x + \frac{n}{4}\pi\right), \end{aligned}$$

因此此式  $\forall n \in \mathbf{N}$  成立.

**例 2.32** 设函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导, 且

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2},$$

求证: 存在  $\xi \in (0, +\infty)$  使得  $f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$ .

**解析** 由题给不等式, 令  $x \rightarrow 0$  得  $f(0) = 0$ , 且由  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$  得

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

令

$$F(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2},$$

① 若对一切  $x \geq 0$  有  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , 则  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ , 所以对任何正数  $\xi$  有

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2};$$

② 若存在  $x_0 > 0$  使得  $f(x_0) \neq \frac{x_0}{1+x_0^2}$ , 则  $F(x_0) < 0$ , 由于  $F(0) = f(0) - 0 = 0$ ,  $F(+\infty) = f(+\infty) - 0 = 0$ , 所以  $F(x)$  在  $(0, +\infty)$  内取最小值, 设最小值为  $F(\xi)$ , 则由费马定理得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

**例 2.33** 设函数  $f(x)$  在  $x=a$  连续, 在  $x=a$  的某去心邻域内



可导,且

$$\lim_{x \rightarrow a-} f'(x) = f'(a-), \lim_{x \rightarrow a+} f'(x) = f'(a+)$$

都存在,求证  $f'_-(a) = f'(a-), f'_+(a) = f'(a+)$ .

**解析** 由左导数与右导数的定义有

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x < a),$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x > a),$$

在  $[x, a]$  与  $[a, x]$  上分别应用拉格朗日中值定理,必  $\exists \xi_1 \in (x, a), \xi_2 \in (a, x)$ ,使得

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f'(\xi_1)(x - a)}{x - a} = \lim_{\xi_1 \rightarrow a-} f'(\xi_1) = f'(a-),$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(\xi_2)(x - a)}{x - a} = \lim_{\xi_2 \rightarrow a+} f'(\xi_2) = f'(a+).$$

**例 2.34** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f'(\xi) = g'(\xi)f(\xi).$$

**解析** 取辅助函数

$$F(x) = e^{-g(x)} f(x),$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ , 应用罗尔定理, 必  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ . 由于

$$F'(x) = e^{-g(x)} (f'(x) - g'(x)f(x)),$$

令  $x = \xi$ , 即得

$$f'(\xi) = g'(\xi)f(\xi).$$

**附注 I** 读者可取  $g(x)$  为  $\lambda x, \lambda x^2$  等函数代入上式, 将获得一系列命题. 例如下列两道例题皆用到此方法.

**附注 II** 上述命题的逆否命题是: 设  $f(x), g(x)$  可导, 若对一切  $x$  有  $f'(x) - g'(x)f(x) \neq 0$ , 则  $f(x)$  至多有一个零点 (读者可用此例中的辅助函数应用反证法给出证明).

例 2.35 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上可导,  $f(0) = f(1) = 0$ , 且

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - 1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

求证: 1)  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值大于 1;

2) 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f'(\xi) = 2(f(\xi) - \xi) + 1$ .

解析 1) 由题意得  $x \rightarrow \frac{1}{2}$  时,

$$f(x) = 1 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (\alpha \rightarrow 0),$$

令  $x \rightarrow \frac{1}{2}$  可得  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ , 且

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x) - 1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

由于在  $x = \frac{1}{2}$  的左右附近  $f(x) > 1 = f\left(\frac{1}{2}\right)$ , 所以  $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$  为  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的一个极小值. 而  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 所以  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上有最大值, 故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上的最大值大于 1.

2) 令

$$F(x) = e^{-2x}(f(x) - x),$$

则  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可导. 由于  $F\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-1}\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e} > 0$ ,

$F(1) = e^{-2}(f(1) - 1) = -\frac{1}{e^2} < 0$ , 应用零点定理,  $\exists c \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ , 使得

$F(c) = 0$ , 又  $F(0) = 0$ , 在  $[0, c]$  上应用罗尔定理得,  $\exists \xi \in (0, c) \subset (0, 1)$  使得  $F'(\xi) = 0$ . 由于

$$\begin{aligned} F'(x) &= e^{-2x}(f'(x) - 1) - 2e^{-2x}(f(x) - x) \\ &= e^{-2x}[f'(x) - 1 - 2(f(x) - x)], \end{aligned}$$

令  $x = \xi$  即得

$$f'(\xi) - 1 = 2(f(\xi) - \xi).$$

**例 2.36** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 在  $(a, b)$  内二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'(a)f'(b) > 0$ , 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = f(\xi)$ .

**解析** 不妨设  $f'(a) > 0, f'(b) > 0$ , 由导数的几何意义, 在  $x = a$  的右邻域中  $\exists c_1$ , 使得  $f(c_1) > f(a) = 0$ ; 在  $x = b$  的左邻域中  $\exists c_2$ , 使得  $f(c_2) < f(b) = 0$ , 且令  $c_1 < c_2$ . 应用零点定理,  $\exists c \in (c_1, c_2)$ , 使得  $f(c) = 0$ .

令  $F(x) = e^x f(x)$ , 则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F(a) = F(c) = F(b) = 0$ . 分别在  $[a, c]$  与  $[c, b]$  上应用罗尔定理得,  $\exists \eta_1 \in (a, c)$ , 使得  $F'(\eta_1) = 0$ ;  $\exists \eta_2 \in (c, b)$ , 使得  $F'(\eta_2) = 0$ . 由于

$$F'(x) = e^x(f'(x) + f(x)),$$

故有  $f'(\eta_1) + f(\eta_1) = 0, f'(\eta_2) + f(\eta_2) = 0$ .

令  $G(x) = e^{-x}(f'(x) + f(x))$ , 则  $G(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导. 由于  $G(\eta_1) = 0, G(\eta_2) = 0$ , 在  $[\eta_1, \eta_2]$  上应用罗尔定理得,  $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ , 使得  $G'(\xi) = 0$ . 由于

$$G'(x) = e^{-x}[f''(x) + f'(x) - (f'(x) + f(x))],$$

故有

$$f''(\xi) + f'(\xi) = f'(\xi) + f(\xi),$$

即  $f''(\xi) = f(\xi)$ .

**例 2.37** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  ( $a > 0$ ) 上可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 求证: 对任意常数  $\lambda$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\lambda f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

**解析** 取辅助函数  $F(x) = x^\lambda f(x)$ , 则  $F(a) = F(b) = 0$ , 且  $F(x)$  在  $[a, b]$  ( $a > 0$ ) 上可导, 应用罗尔定理, 必  $\exists \xi \in (a, b)$  使得  $F'(\xi) = 0$ ,

即

$$\xi^{a-1}(\lambda f(\xi)) + \xi f'(\xi) = 0,$$

由于  $a > 0, \xi > 0$ , 故有

$$\lambda f(\xi) + \xi f'(\xi) = 0.$$

**例 2.38** 设函数  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导,  $f(0) = f(1)$ , 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使得

$$2f'(\xi) + (\xi - 1)f''(\xi) = 0.$$

**解析 方法 I 取辅助函数**

$$F(x) = (x - 1)f(x),$$

则  $F(0) = -f(0), F(1) = 0$ , 且  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 在  $[0, 1]$  上应用拉格朗日中值定理, 必  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得

$$F(1) - F(0) = F'(\eta)(1 - 0),$$

即  $F'(\eta) = f(0)$ . 由于  $F'(x) = f(x) + (x - 1)f'(x), F'(1) = f(1) = f(0)$ , 故  $F'(\eta) = F'(1)$ , 又  $F'(x)$  在  $[\eta, 1]$  上可导, 在  $[\eta, 1]$  上应用罗尔定理, 必  $\exists \xi \in (\eta, 1) \subset (0, 1)$ , 使得  $F''(\xi) = 0$ , 由于

$$F''(x) = 2f'(x) + (x - 1)f''(x),$$

将  $x = \xi$  代入上式, 即得原式成立.

**方法 II 取辅助函数**

$$F(x) = (x - 1)^2 f'(x),$$

则  $F(1) = 0$ , 且  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可导. 由于  $f(0) = f(1)$ , 对  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上应用罗尔定理, 必  $\exists \eta \in (0, 1)$ , 使得  $f'(\eta) = 0$ . 于是  $F(\eta) = 0$ , 对  $F(x)$  在  $[\eta, 1]$  上应用罗尔定理, 必  $\exists \xi \in [\eta, 1] \subset (0, 1)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ . 由于

$$F'(x) = 2(x - 1)f'(x) + (x - 1)^2 f''(x),$$

将  $x = \xi$  代入上式, 并去掉非零因子  $\xi - 1$ , 即得原式成立.

**例 3.39** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导 ( $a > 0$ ), 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a} = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

**解析 方法 I** 上式中含  $\xi$  的项已分离在右端, 下面介绍“利用对称性构造辅助函数”的方法. 令

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a} = k,$$

将此式变形, 使  $a, b$  分离得对称式

$$\frac{f(a)}{a} + \frac{1}{a}k = \frac{f(b)}{b} + \frac{1}{b}k,$$

在此式中将  $a$  与  $b$  用  $x$  代替, 并将  $k$  值代入即得辅助函数

$$F(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{af(b)-bf(a)}{b-a} \frac{1}{x},$$

只要函数  $F(x)$  满足罗尔定理的条件即可①.

令  $F(x)$  如上式所示, 则

$$F(a) = \frac{f(a)}{a} + \frac{af(b)-bf(a)}{b-a} \cdot \frac{1}{a} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

$$F(b) = \frac{f(b)}{b} + \frac{af(b)-bf(a)}{b-a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

即  $F(a)=F(b)$ , 又函数  $F(x)$  在  $[a, b]$  ( $a>0$ ) 上可导, 应用罗尔定理, 必  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi)=0$ . 由于

$$F'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} - \frac{af(b)-bf(a)}{b-a} \frac{1}{x^2},$$

将  $x=\xi$  代入, 上式即得原式成立.

**方法 II** 记

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a} = k,$$

① 在拉格朗日中值定理和柯西中值定理的证明中, 都可利用对称性构造辅助函数, 它们分别是

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x \quad \text{与} \quad F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x).$$

此式等价于恒等式

$$a \frac{f(b)}{b} - f(a) - k \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \equiv 0.$$

将上式中的  $b$  改为  $x$ , 即得辅助函数

$$F(x) = a \frac{f(x)}{x} - f(a) - k \left( 1 - \frac{a}{x} \right).$$

由于  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $F(b) = F(a) = 0$ , 应用罗尔定理, 必  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ . 由于

$$F'(x) = a \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} - \frac{ka}{x^2},$$

将  $x = \xi$  代入上式, 由  $a > 0, \xi > 0$  即得

$$k = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

于是

$$\frac{af(b) - bf(a)}{b - a} = k = \xi f'(\xi) - f(\xi).$$

方法Ⅲ 原式化为

$$\frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

此式左端启示我们对  $F(x) = \frac{f(x)}{x}, G(x) = \frac{1}{x}$ , 在  $[a, b]$  上应用柯西

中值定理. 令  $F(x) = \frac{f(x)}{x}, G(x) = \frac{1}{x}$ , 则  $F(x), G(x)$  在  $[a, b] (a >$

$0)$  上可导, 且  $G'(x) = -\frac{1}{x^2} \neq 0$ , 应用柯西中值定理, 必  $\exists \xi \in (a, b)$  使

得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{af(b) - bf(a)}{a - b}$$

$$= \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)} = \frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

上式两边乘以 $(-1)$ ,即得原式成立.

**例 2.40** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上三阶可导 ( $a > 0$ ), 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b))(b-a) - \frac{1}{12}f'''(\xi)(b-a)^3.$$

**解析** 记

$$\frac{12}{(b-a)^3} \left[ \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b))(b-a) - (f(b) - f(a)) \right] = k,$$

此式等价于恒等式

$$f(b) - f(a) - \frac{1}{2}(f'(a) + f'(b))(b-a) + \frac{1}{12}k(b-a)^3 \equiv 0.$$

将上式中的  $b$  改为  $x$ , 即得辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(f'(a) + f'(x))(x-a) + \frac{k}{12}(x-a)^3,$$

则  $F(b)=0$ , 又  $F(a)=0$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 应用罗尔定理, 必存在  $\eta \in (a, b)$ , 使得  $F'(\eta)=0$ . 由于

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) - \frac{1}{2}f''(x)(x-a) - \frac{1}{2}(f'(a) + f'(x)) + \\ &\quad \frac{k}{4}(x-a)^2, \\ &= \frac{1}{2}(f'(x) - f'(a)) - \frac{1}{2}f''(x)(x-a) + \frac{k}{4}(x-a)^2, \end{aligned}$$

显见  $F'(a)=0$ , 且  $F'(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 应用罗尔定理, 必存在  $\xi \in (a, \eta) \subset (a, b)$ , 使得  $F''(\xi)=0$ . 由于

$$F''(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{2}f'''(x)(x-a) - \frac{1}{2}f''(x) + \frac{k}{2}(x-a)$$

$$= -\frac{1}{2}f'''(x)(x-a) + \frac{k}{2}(x-a).$$

将  $x=\xi$  代入此式即得  $k=f'''(\xi)$ , 于是原式成立.

**例 2.41** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f(a)=0, f(b)=1$ , 求证: 存在  $\xi, \eta \in (a, b)$ , 且  $\xi \neq \eta$ , 使得

$$\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2(b-a).$$

**解析** 原式  $\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{2}}{f'(\xi)} + \frac{\frac{1}{2}}{f'(\eta)} = b-a,$

由  $f(a)=0, f(b)=1$ , 应用介值定理, 必  $\exists c \in (a, b)$ , 使  $f(c) = \frac{1}{2}$ . 于是

$$\text{原式} \Leftrightarrow \frac{f(c)-f(a)}{f'(\xi)} + \frac{f(b)-f(c)}{f'(\eta)} = b-a.$$

此式提示我们对函数  $f(x)$  分别在区间  $[a, c]$  与  $[c, b]$  上应用拉格朗日中值定理. 证明如下:

因  $f(a)=0, f(b)=1$ , 应用介值定理, 必  $\exists c \in (a, b)$  使得  $f(c) = \frac{1}{2}$ . 在区间  $[a, c]$  与  $[c, b]$  上分别应用拉格朗日中值定理得, 必  $\exists \xi \in (a, c), \eta \in (c, b) (\xi \neq \eta)$  使得

$$f(c) - f(a) = f'(\xi)(c-a), \text{ 即 } \frac{1}{2} = f'(\xi)(c-a).$$

$$f(b) - f(c) = f'(\eta)(b-c), \text{ 即 } \frac{1}{2} = f'(\eta)(b-c),$$

于是

$$\frac{1}{f'(\xi)} + \frac{1}{f'(\eta)} = 2(c-a) + 2(b-c) = 2(b-a).$$

**例 2.42** 假设函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 并且  $g''(x) \neq 0, f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$ , 试证:



(1) 在开区间  $(a, b)$  内  $g(x) \neq 0$ ;

(2)  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

**解析** (1) 用反证法. 若存在点  $c \in (a, b)$ , 使  $g(c) = 0$ , 则对  $g(x)$  在  $[a, c]$  和  $[c, b]$  上分别应用罗尔定理, 知存在  $\xi_1 \in (a, c)$  和  $\xi_2 \in (c, b)$  使

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

再对  $g'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上应用罗尔定理, 知存在  $\xi_3 \in (\xi_1, \xi_2)$ , 使  $g''(\xi_3) = 0$ . 这与题设  $g''(x) \neq 0$  矛盾, 故在  $(a, b)$  内  $g(x) \neq 0$ .

(2) 令

$$F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

易知  $F(a) = F(b) = 0$ , 对  $F(x)$  在  $[a, b]$  上应用罗尔定理, 知存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $F'(\xi) = 0$ , 即  $f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0$ . 因  $g(\xi) \neq 0$ ,  $g''(\xi) \neq 0$ , 故得

$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

**例 2.43** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导,  $|f''(x)| \leq M$ , 且  $f(x)$  在  $(0, 1)$  内取得最大值, 试证

$$|f'(0)| + |f'(1)| \leq M.$$

**解析** 设  $f(x)$  在  $x=c \in (0, 1)$  取最大值, 因  $f(x)$  在  $(0, 1)$  上可导, 故  $f'(c) = 0$ . 对于函数  $y = f'(x)$ , 因  $f'(x)$  在  $(0, 1)$  上可导, 在区间  $[0, c]$  与  $[c, 1]$  上分别应用拉格朗日中值定理得: 存在  $\xi_1 \in (0, c)$ ,  $\xi_2 \in (c, 1)$ , 使得

$$\begin{aligned} f'(c) - f'(0) &= f''(\xi_1)c, \\ f'(1) - f'(c) &= f''(\xi_2)(1-c), \end{aligned}$$

即

$$f'(0) = -f''(\xi_1)c, \quad f'(1) = f''(\xi_2)(1-c),$$

于是

$$\begin{aligned} |f'(0)| + |f'(1)| &= |f''(\xi_1)|c + |f''(\xi_2)|(1-c) \\ &\leq Mc + M(1-c) = M. \end{aligned}$$

**例 2.44** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f'(a) = f'(b) = 0$ , 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$|f''(\xi)| \geq 4 \frac{|f(b) - f(a)|}{(b-a)^2}.$$

**解析** 将  $f(x)$  在  $x=a$  与  $x=b$  处分别展为泰勒展式得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1)(x-a)^2,$$

$$f(x) = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(x-b)^2,$$

其中  $\xi_1 \in (a, x)$ ,  $\xi_2 \in (x, b)$ . 在两式中分别令  $x = \frac{a+b}{2}$  可得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{1}{2}f''(\xi_1') \frac{1}{4}(b-a)^2, \quad (1)$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{1}{2}f''(\xi_2') \frac{1}{4}(a-b)^2, \quad (2)$$

其中  $\xi_1' \in \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ ,  $\xi_2' \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ . (1)式减(2)式得

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{8}(f''(\xi_1') - f''(\xi_2'))(b-a)^2,$$

于是

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \frac{1}{8}(b-a)^2(|f''(\xi_1')| + |f''(\xi_2')|) \\ &\leq \frac{1}{8}(b-a)^2 \cdot 2\max(|f''(\xi_1')|, |f''(\xi_2')|) \\ &= \frac{1}{4}(b-a)^2 |f''(\xi)|. \end{aligned}$$

这里  $\xi$  为  $\xi_1'$  或  $\xi_2'$ . 由此即得原式.

**例 2.45** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[-1, 1]$  上具有三阶连续导数,

且  $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$ , 证明: 在开区间  $(-1, 1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使  $f'''(\xi)=3$ .

**解析** 由题给条件  $f(x)$  有三阶连续导数, 且  $f'(0)=0$ , 容易想到用  $f(x)$  的二阶马克劳林展式来估计余项  $f'''(\xi)$  的值.

由马克劳林公式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中  $\eta$  介于 0 与  $x$  之间,  $x \in [-1, 1]$ .

分别取  $x=-1$  和  $x=1$ , 并结合已知条件, 得

$$0 = f(-1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) - \frac{1}{6}f'''(\eta_1), \quad -1 < \eta_1 < 0,$$

$$1 = f(1) = f(0) + \frac{1}{2}f''(0) + \frac{1}{6}f'''(\eta_2), \quad 0 < \eta_2 < 1,$$

两式相减, 可得

$$f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2) = 6.$$

由  $f'''(x)$  的连续性知  $f'''(x)$  在闭区间  $[\eta_1, \eta_2]$  上有最大值和最小值, 设它们分别为  $M$  和  $m$ , 则有

$$m \leq \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] \leq M.$$

再由连续函数的介值定理知, 至少存在一点  $\xi \in [\eta_1, \eta_2] \subset (-1, 1)$ , 使

$$f'''(\xi) = \frac{1}{2}[f'''(\eta_1) + f'''(\eta_2)] = 3.$$

**例 2.46** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上二阶可导, 且  $f(0)=f(1)=0$ ,  $\min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$ , 求证

$$\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8.$$

**解析** 因  $f(x)$  二阶可导, 故  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且可导, 据闭区间上的连续函数的最值定理, 必存在  $c \in (0, 1)$ , 使得  $f(c) = -1$  为最小值, 又据费马定理得  $f'(c) = 0$ . 函数  $f(x)$  在  $x=c$  的一阶泰勒

展式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2 \\ &= -1 + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-c)^2, \end{aligned}$$

其中  $\xi$  介于  $c$  与  $x$  之间, 分别取  $x=0$  与  $1$ , 并结合已知条件, 得

$$f(0) = -1 + \frac{1}{2}f''(\xi_1)c^2 = 0, \quad (1)$$

$$f(1) = -1 + \frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-c)^2 = 0. \quad (2)$$

当  $c \in (0, \frac{1}{2}]$  时, 由(1)得  $f''(\xi_1) = \frac{2}{c^2} \geq 8$ ; 当  $c \in [\frac{1}{2}, 1)$  时, 由(2)得  $f''(\xi_2) = \frac{2}{(1-c)^2} \geq 8$ , 由此即得  $\max_{x \in [0, 1]} f''(x) \geq 8$ .

**例 2.47** 设  $y = f(x)$  在  $(-1, 1)$  内具有二阶连续导数, 且  $f''(x) \neq 0$ , 试证:

(1) 对于  $(-1, 1)$  内的任一非零  $x$ , 存在惟一的  $\theta(x) \in (0, 1)$ , 使

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x)$$

成立;

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

**解析** (1) 任给非零  $x \in (-1, 1)$ , 由拉格朗日中值定理得

$$f(x) = f(0) + xf'(\theta(x)x) \quad (0 < \theta(x) < 1). \quad (1)$$

因为  $f''(x)$  在  $(-1, 1)$  内连续, 且  $f''(x) \neq 0$ , 所以  $f''(x)$  在  $(-1, 1)$  内不变号. 不妨设  $f''(x) > 0$ , 则  $f'(x)$  在  $(-1, 1)$  内严格增, 故  $\theta(x)$  惟一.

下面用三种方法证明(2).

**方法 I** 由于(1)式得

$$\theta(x) \frac{f(\theta(x)x) - f'(0)}{x\theta(x)} = \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2}. \quad (2)$$

由二阶导数的定义得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0),$$

又由洛必达法则得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0) - f'(0)x}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{2x} = \frac{1}{2}f''(0),$$

在(2)式中令  $x \rightarrow 0$  即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

**方法 II** 应用马克劳林展开式得

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2, \quad (3)$$

这里  $\xi$  介于 0 与  $x$  之间. 联立(1),(3)两式得

$$\theta(x) \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = \frac{1}{2}f''(\xi). \quad (4)$$

由二阶导数的定义得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(\theta(x)x) - f'(0)}{\theta(x)x} = f''(0),$$

又由  $f''(x)$  的连续性得

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0),$$

在(4)式中令  $x \rightarrow 0$  即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

**方法 III** 对  $f'(x)$  应用拉格朗日中值定理得

$$f'(\theta(x)x) = f'(0) + \theta(x)xf''(\theta_1(x)\theta(x)x),$$

这里  $0 < \theta_1(x) < 1$ . 将上式代入(1)式得

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \theta(x)x^2 f''(\theta_1(x)\theta(x)x). \quad (5)$$

又由马克劳林展式

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2}x^2 f''(\xi), \quad (3)$$

这里  $\xi$  介于 0 与  $x$  之间. 联立(3)与(5)式得

$$\theta(x)f''(\theta_1(x)\theta(x)x) = \frac{1}{2}f''(\xi),$$

令  $x \rightarrow 0$ , 应用  $f''(x)$  的连续性得

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} f''(\theta_1(x)\theta(x)x) &= f''(0), \\ \lim_{x \rightarrow 0} f''(\xi) &= \lim_{\xi \rightarrow 0} f''(\xi) = f''(0),\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

**例 2.48** 试求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$ .

**解析** 方法 I 采用等价无穷小因子代换得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} (e^{x - \sin x} - 1)}{x - \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} \frac{x - \sin x}{x - \sin x} \\ &= 1.\end{aligned}$$

**方法 II** 令  $f(u) = e^u$ ,  $u_1 = x$ ,  $u_2 = \sin x$ , 应用拉格朗日中值定理得:  $\exists \xi$  介于  $u_1$  与  $u_2$  之间, 使得

$$\frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} = f'(\xi),$$

即

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^\xi.$$

由于  $x \rightarrow 0$  时,  $u_1 \rightarrow 0$ ,  $u_2 \rightarrow 0$ , 故  $\xi \rightarrow 0$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{\xi \rightarrow 0} e^\xi = 1.$$

**例 2.49** 试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left( \arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right)$  ( $a \neq 0$ ).

**解析** 设  $f(x) = \arctan x$ , 在区间  $\left[\frac{a}{n+1}, \frac{a}{n}\right]$  上应用拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned} & \arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \\ &= f\left(\frac{a}{n}\right) - f\left(\frac{a}{n+1}\right) \\ &= f'(\xi) \left(\frac{a}{n} - \frac{a}{n+1}\right) \\ &= \frac{a}{(1+\xi^2)n(n+1)} \quad \left(\frac{a}{n+1} < \xi < \frac{a}{n}\right), \end{aligned}$$

由于  $n \rightarrow \infty$  时,  $\xi \rightarrow 0$ , 所以

$$\text{原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2}{(1+\xi^2)n(n+1)} = a.$$

**例 2.50** 设当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - (ax^2 + bx + 1)$  是  $x^2$  的高阶无穷小, 求常数  $a, b$ .

**解析** 将  $e^x$  的马克劳林展式代入原式(因原式比  $x^2$  高阶, 所以展开到  $x$  的 2 次幂即行),

$$\begin{aligned} e^x - (ax^2 + bx + 1) &= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) - ax^2 - bx - 1 \\ &= (1-b)x + \left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 + o(x^2) \quad (x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

因原式是  $x^2$  的高阶无穷小, 所以  $b=1, a=\frac{1}{2}$ .

**例 2.51** 已知  $e^x - \frac{1+ax}{1+bx}$  关于  $x$  为 3 阶无穷小, 求常数  $a, b$  之值.

**解析** 函数  $e^x$  与  $\frac{1}{1+bx}$  的 3 阶马克劳林展式分别为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3),$$

$$\frac{1}{1+bx} = 1 - bx + b^2x^2 - b^3x^3 + o(x^3),$$

于是

$$\begin{aligned} e^x - \frac{1+ax}{1+bx} &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right) - \\ &\quad (1+ax)(1-bx+b^2x^2-b^3x^3+o(x^3)) \\ &= \left(1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right) - (1+ \\ &\quad (a-b)x+b(b-a)x^2-b^2(b-a)x^3+o(x^3)) \\ &= (1-a+b)x + \left(\frac{1}{2}+ab-b^2\right)x^2 + \\ &\quad \left(\frac{1}{6}+b^3-ab^2\right)x^3+o(x^3), \end{aligned}$$

由于原式关于  $x$  是 3 阶无穷小, 所以必定有

$$1-a+b=0, \quad \frac{1}{2}+ab-b^2=0, \quad \frac{1}{6}+b^3-ab^2 \neq 0,$$

由此可解出  $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$  为所求之值.

**例 2.52** 若  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) = 0$ , 则  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} =$  ( ).

(A) 0

(B) 6

(C) 36

(D)  $\infty$

**解析** 方法 I 应用  $\sin 6x$  的马克劳林展式, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x - \frac{1}{3!}(6x)^3 + o(x^3) + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( -\frac{1}{6} 6^3 \cdot \frac{x^3}{x^3} \right) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + xf(x)}{x^3} \\ &= -36 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 0, \end{aligned}$$



所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 36$ . 故选(C).

**方法 II** 应用洛必达法则, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x + 6x + xf(x)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - 6x}{x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\cos 6x - 6}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6\left(-\frac{1}{2}(6x)^2\right)}{3x^2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} \\ &= -36 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 + f(x)}{x^2} + 0, \end{aligned}$$

所以  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6+f(x)}{x^2} = 36$ . 故选(C).

**例 2.53** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{\ln(1+2x^3)}$ .

**解析** 应用等价无穷小因子代替与洛必达法则得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x - x}{2x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{6x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{6x^2(1+x^2)} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**例 2.54** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x} \right)$ .

**解析** 通分, 再利用等价无穷小因子代换和洛必达法则得,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^2 \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sec^2 x \tan x}{6x} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

例 2.55 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$ .

解析 因  $x \rightarrow 0$  时,  $1 - \sqrt{1-x^2} \sim \frac{1}{2}x^2$ , 应用等价无穷小因子代换与洛必达法则得

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{\frac{1}{2}x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{1} = 1.$$

例 2.56 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x \ln(1+x) - x^2}$ .

解析 综合运用有理化, 等价无穷小因子代换, 洛必达法则得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x [\ln(1+x) - x]} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x \cdot [\ln(1+x) - x]} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\ln(1+x) - x} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\frac{1}{1+x} - 1} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{-x} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

例 2.57 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{1+e^{-x}} - \ln(1+e^x) \right)$ .

解析 这是  $\infty - \infty$  型未定式, 将其化为  $\frac{\infty}{\infty}$  型的未定式,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x - (1+e^x)\ln(1+e^x)}{1+e^x} \\ &\stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + xe^x - e^x \ln(1+e^x) - e^x}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1+e^x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \end{aligned}$$

$$= \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} \right) = \ln \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} \right) = \ln 1 = 0.$$

**例 2.58** 试求  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(x)} \right)$ , 其中  $f(x)$  在  $x=a$  的邻域中二阶导数连续, 且  $f'(a) \neq 0$ .

**解析**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x-a)(f(x)-f(a))f'(x)} \\ &= \frac{1}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(x) - f(x) + f(a)}{(x-a)(f(x)-f(a))} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f''(x)}{f(x)-f(a) + (x-a)f'(x)} \\ &= \frac{f''(a)}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-a}{f(x)-f(a) + (x-a)f'(x)} \\ &= \frac{f''(a)}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f'(x)} \\ &= \frac{f''(a)}{2(f'(a))^2}. \end{aligned}$$

**评注** 在本题中若一开始先取极限  $f'(x) \rightarrow f'(a)$ , 将原式化为

$$\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right)$$

是错误的. 事实上

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{1}{f(x)-f(a)} - \frac{1}{(x-a)f'(a)} \right) \\ &= \frac{1}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)f'(a) - f(x) + f(a)}{(x-a)(f(x)-f(a))} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \frac{1}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(a) - f'(x)}{f(x)-f(a) + (x-a)f'(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{0}{0}}{f'(a)} \lim_{x \rightarrow a} \frac{-f''(x)}{f'(x) + f'(x) + (x-a)f''(x)} \\
 &= \frac{-f''(a)}{2(f'(a))^2}.
 \end{aligned}$$

其结果为正确答案的相反数.

**例 2.59** 设  $f(x)$  二阶可导, 求证

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} = f''(x).$$

**解析** 因  $f(x)$  二阶可导, 故  $f'(x)$  为连续函数, 应用洛必达法则和二阶导数的定义得

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{2h} \frac{2f'(x+2h) - 2f'(x+h)}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+2h) - f'(x+h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(f'(x+2h) - f'(x))}{2h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\
 &= 2f''(x) - f''(x) = f''(x).
 \end{aligned}$$

**例 2.60** 试求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)^{\frac{2}{x}}}{x}$ .

**解析** 应用洛必达法则,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{1} \frac{-(1+x)^{\frac{2}{x}} \left( \frac{2}{x} \ln(1+x) \right)'}{1} \\
 &= -2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - (1+x) \ln(1+x)}{x^2} \\
 &= -2e^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{0}{0}}{2x} = \frac{\ln(1+x)}{2x} = e^2.
 \end{aligned}$$

例 2.61 求  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x$ .

解析 应用变量代换与洛必达法则得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \quad \left( \text{令 } \frac{1}{x} = t \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (\sin 2t + \cos t)^{\frac{1}{t}} = \exp \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln (\sin 2t + \cos t)}{t} \right) \\ & \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \exp \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2 \cos 2t - \sin t}{\sin 2t + \cos t} \right) = e^2. \end{aligned}$$

例 2.62 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$ .

解析 应用洛必达法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln (x + \sqrt{1+x^2})}{x} \right) \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \exp \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} \right] \\ &= \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

例 2.63 试求  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$ , 其中  $a_i > 0, i=1, 2, \dots, n$ .

解析 应用洛必达法则,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln (a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x) - \ln n}{x} \right\} \\ & \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1^x \ln a_1 + \cdots + a_n^x \ln a_n}{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x} \right\} \\ &= \exp \frac{\ln (a_1 a_2 \cdots a_n)}{n} = (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

例 2.64 设函数  $f(x)$  具有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad f''(0) = 4,$$

求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}}.$$

解析 由  $f(x)$  连续与  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , 可得  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0,$$

应用洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0) = 2,$$

于是

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ 1 + \frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{x}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x^2}} = e^2.$$

例 2.65 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

(1) 求  $f'(x)$ , 讨论  $f'(x)$  在  $x=0$  的连续性;

(2) 求  $f''(0)$ .

解析 (1)  $x \neq 0$  时

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2};$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x} = 0.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2} = 0 = f'(0),$$

所以  $f'(x)$  在  $x=0$  连续.

(2)

$$f''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3},$$

**例 2.66** 设函数  $f(x), g(x)$  是大于零的可导函数, 且  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$ , 则当  $a < x < b$  时, 有( ).

- (A)  $f(x)g(b) > f(b)g(x)$       (B)  $f(x)g(a) > f(a)g(x)$   
 (C)  $f(x)g(x) > f(b)g(b)$       (D)  $f(x)g(x) > f(a)g(a)$

**解析** 由条件  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x) < 0$  可得

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} < 0,$$

所以  $\frac{f(x)}{g(x)}$  在  $[a, b]$  上严格减, 于是

$$\frac{f(a)}{g(a)} > \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{f(b)}{g(b)},$$

而  $g(x), g(a), g(b)$  皆大于零, 故有

$$f(a)g(x) > f(x)g(a), \quad f(x)g(b) > f(b)g(x).$$

即只有(A)成立.

**例 2.67** 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内可导, 且对任意  $x_1, x_2$ , 当  $x_1 > x_2$  时, 都有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 则( ).

- (A) 对任意  $x, f'(x) > 0$       (B) 对任意  $x, f'(-x) \leq 0$   
 (C) 函数  $f(-x)$  单调增加      (D) 函数  $-f(-x)$  单调增加

**解析** 由题设条件得  $f'(x) \geq 0$ , 而不是  $f'(x) > 0$ ; 且  $f'(-x) \geq 0$ , 而不是  $f'(-x) \leq 0$ . 设  $x_2 < x_1$ , 则  $-x_1 < -x_2$  于是  $f(-x_1) <$

$f(-x_2), -f(-x_1) > -f(-x_2)$ , 故  $f(-x)$  单调减少,  $-f(-x)$  单调增加. 故选(D).

**例 2.68** 设函数  $f(x)$  满足关系式  $f''(x) + [f'(x)]^2 = x$ , 且  $f'(0) = 0$ , 则( ).

(A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值

(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值

(C) 点  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

(D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值, 点  $(0, f(0))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的拐点

**解析** 由原式知  $f'(0) = 0, f''(0) = 0$ .  $f'(0) = 0$  是  $f(0)$  为极值的必要条件;  $f''(0) = 0$  是  $(0, f(0))$  为拐点的必要条件, 但它们都不是充分条件, 原式两边求导得

$$f'''(x) + 2f'(x) \cdot f''(x) = 1,$$

令  $x=0$  得  $f'''(0) = 1$ , 即

$$f'''(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{x} = 1,$$

所以在  $x=0$  的小邻域内,  $f''(x)$  与  $x$  同号, 即  $f''(x)$  在  $x=0$  左、右两侧异号, 故  $(0, f(0))$  为拐点. 又由  $f''(x)$  的符号, 知  $f'(x)$  在  $x=0$  的左邻近为严格减,  $f'(x)$  在  $x=0$  的右邻近为严格增, 而  $f'(0) = 0$ , 故  $f'(x)$  在  $x=0$  的左、右邻近皆大于 0, 所以  $x=0$  不是极值点. 故只有(C)成立.

**例 2.69** 设  $f(x)$  有二阶连续导数, 且  $f'(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ , 则( ).

(A)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极大值

(B)  $f(0)$  是  $f(x)$  的极小值

(C)  $(0, f(0))$  是曲线  $y = f(x)$  的拐点

(D)  $f(0)$  不是  $f(x)$  的极值,  $(0, f(0))$  也不是曲线  $y = f(x)$  的



## 拐点

**解析** 由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1$ , 且  $f(x)$  二阶连续可导, 故有  $f''(0) = 0$ , 这是  $(0, f(0))$  为拐点的必要条件; 由题意  $f'(0) = 0$ , 这是  $f(0)$  为极值的必要条件. 但它们都不是充分条件. 但由

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{|x|} = 1,$$

可得  $x \rightarrow 0$  时

$$f''(x) = |x| + o(x),$$

这里  $o(x)$  表示它比  $x$  为高阶无穷小. 所以存在  $x=0$  的某邻域  $U$ , 使得  $f''(x) \geq 0, x \in U$ . 于是在  $x=0$  的左右两侧,  $y=f(x)$  皆为下凸 (即凹),  $(0, f(0))$  不是拐点. 由  $f''(x) \geq 0, x \in U$ , 可知  $f'(x)$  单调增加, 而  $f'(0) = 0$ , 所以  $f'(x)$  在  $x=0$  的左右两侧改变符号,  $x < 0$  时  $f' < 0$ ,  $x > 0$  时  $f' > 0$ , 故  $f(0)$  为  $f(x)$  的极小值, 即 (B) 成立.

**例 2.70** 讨论函数  $y = \frac{\ln^2 x}{x}$  的单调性, 并求极值.

**解析** 该函数的定义域为  $(0, +\infty)$ , 由于

$$y' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot x - \ln^2 x}{x^2} = \frac{(2 - \ln x) \ln x}{x^2},$$

令  $y' = 0$ , 解得驻点为  $x = 1, e^2$ . 讨论  $y'$  的符号如下表所示

| $x$  | $(0, 1)$ | 1 | $(1, e^2)$ | $e^2$ | $(e^2, +\infty)$ |
|------|----------|---|------------|-------|------------------|
| $y'$ | -        | 0 | +          | 0     | -                |
| $y$  | ↓        |   | ↑          |       | ↓                |

所以函数  $y$  在  $(0, 1)$  与  $(e^2, +\infty)$  上单调减, 在  $(1, e^2)$  上单调增;  $y(1)$  为极小值,  $y(e^2)$  为极大值. 其极小值为  $y(1) = 0$ , 极大值为  $y(e^2) = \frac{4}{e^2}$ .

**评注** 极小值与极大值的判定也可用二阶导数判别.

**例 2.71** 设函数  $y=y(x)$  由方程  $2y^3-2y^2+2xy-x^2=1$  所确定. 试求  $y=y(x)$  的驻点, 并判别它是否为极值点.

**解析** 对原方程两边求导可得

$$3y^2y' - 2yy' + xy' + y - x = 0. \quad (1)$$

令  $y'=0$ , 得  $y=x$ . 将此代入原方程有

$$2x^3 - x^2 - 1 = 0,$$

从而解得唯一的驻点  $x=1$ .

对(1)式两边求导得

$$(3y^2 - 2y + x)y'' + 2(3y - 1)y'^2 + 2y' - 1 = 0,$$

因此

$$y'' \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2} > 0,$$

故驻点  $x=1$  是  $y=y(x)$  的极小值点.

**例 2.72** 就  $k$  的不同取值情况, 确定方程  $x - \frac{\pi}{2} \sin x = k$  在开区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内根的个数, 并证明你的结论.

**解析** 设  $f(x) = x - \frac{\pi}{2} \sin x$ , 则  $f(x)$  在  $[0, \frac{\pi}{2}]$  上连续. 由  $f'(x) = 1 - \frac{\pi}{2} \cos x = 0$ , 解得  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内的惟一驻点  $x_0 = \arccos \frac{2}{\pi}$ . 由于当  $x \in (0, x_0)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ ,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $[0, x_0]$  上单调减少, 在  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  上单调增加. 又  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ , 因此  $x_0$  是  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内的惟一最小值点, 最小值为

$$y_0 = f(x_0) = x_0 - \frac{\pi}{2} \sin x_0 < 0,$$

故在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内  $f(x)$  的取值范围为  $[y_0, 0)$ . 因此有

① 当  $k \notin [y_0, 0)$ , 即  $k < y_0$  或  $k \geq 0$  时, 原方程在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内没有根;

② 当  $k = y_0$  时, 原方程在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内有惟一根  $x_0$ ;

③ 当  $k \in (y_0, 0)$  时, 原方程在  $(0, x_0)$  和  $(x_0, \frac{\pi}{2})$  内各恰有一根, 即原方程在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内恰有两个不同的根.

**例 2.73** 设常数  $k > 0$ , 函数  $f(x) = \ln x - \frac{x}{e} + k$  在  $(0, +\infty)$  内零点的个数为( ).

(A) 3                      (B) 2                      (C) 1                      (D) 0

**解析**  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$ , 令  $f'(x) = 0$  得驻点  $x = e$ . 分区间讨论  $f'(x)$  的符号得

| $x$     | $(0, e)$ | $e$ | $(e, +\infty)$ |
|---------|----------|-----|----------------|
| $f'(x)$ | +        | 0   | -              |

所以  $f(x)$  在  $x = e$  取极大值  $f(e) = k > 0$ , 由于  $f(0+) = -\infty$ ,

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \ln x - \frac{x}{e} + k \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e} \ln \frac{x^e}{e^x} + k = -\infty,$$

且  $f(x)$  在  $(0, e)$  上严格增, 在  $(e, +\infty)$  上严格减, 所以  $f(x)$  在  $(0, e)$  上恰有一个零点, 在  $(e, +\infty)$  上恰有一个零点. 故(B)成立.

**例 2.74** 设  $f(x)$  二阶可导,  $f''(x) < 0$ , 又  $f(a) > 0$ ,  $f'(a) < 0$ , 求证  $f(x)$  在区间  $(a, a - \frac{f(a)}{f'(a)})$  内恰有一个零点.

**解析** 本题的几何意义很清楚.  $y = f(x)$  在  $x = a$  的切线

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

与  $x$  轴的交点为  $(a - \frac{f(a)}{f'(a)}, 0)$ . 由于

$y'' < 0$ , 曲线上凸, 所以  $f(a - \frac{f(a)}{f'(a)}) <$

0. 在区间  $[a, a - \frac{f(a)}{f'(a)}]$  上应用零点定

理即可. 惟一性用  $f(x)$  的严格单调性证明. 下面进行严格证明.

函数  $f(x)$  在  $x=a$  的泰勒展式为

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2,$$

这里  $a < \xi < x$ , 由于  $f''(x) < 0, (x-a)^2 > 0$ , 所以

$$f(x) < f(a) + f'(a)(x-a),$$

令  $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)} (> a)$ , 得

$$f(a - \frac{f(a)}{f'(a)}) < f(a) + f'(a)(-\frac{f(a)}{f'(a)}) = 0,$$

因为  $f(a) > 0$ ,  $f(x)$  在  $[a, a - \frac{f(a)}{f'(a)}]$  上连续, 应用零点定理, 存在

$\xi \in (a, a - \frac{f(a)}{f'(a)})$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . 即  $f(x)$  在所给区间内至少有一个零点.

又因为  $f''(x) < 0$ , 所以  $f'(x)$  严格减, 而  $f'(a) < 0$ , 所以当  $x > a$  时  $f'(x) < 0$ , 于是  $f(x)$  在  $x > a$  时严格减, 因而  $f(x)$  的零点最多一个, 于是上述  $f(x)$  的零点  $\xi$  是惟一的.

**例 2.75** 求证: 当  $x > 0$  时,  $(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2$ .

**解析** 应用函数的单调性证明.

**方法 I** 令  $\varphi(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2$ , 易得  $\varphi(1) = 0$ . 由于

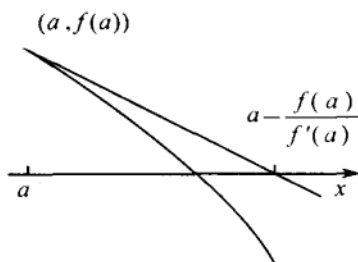


图 2.1

$$\varphi'(x) = 2x \ln x - x + 2 - \frac{1}{x},$$

$$\varphi''(x) = 2x \ln x + 1 + \frac{1}{x^2},$$

$$\varphi'''(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x^3}.$$

由此可得:当  $0 < x < 1$  时  $\varphi'''(x) < 0$ , 故  $\varphi''(x)$  严格减; 当  $1 < x < +\infty$  时  $\varphi'''(x) > 0$ , 故  $\varphi''(x)$  严格增. 而  $\varphi''(1) = 2 > 0$ , 所以  $x \in (0, +\infty)$  时  $\varphi''(x) \geq 2 > 0$ , 由此推知  $\varphi'(x)$  在  $(0, +\infty)$  上严格增. 再由  $\varphi'(1) = 0$  推知:当  $0 < x < 1$  时  $\varphi'(x) < 0$ , 故  $\varphi(x)$  严格减; 当  $1 < x < +\infty$  时  $\varphi'(x) > 0$ , 故  $\varphi(x)$  严格增. 而  $\varphi(1) = 0$ , 所以  $x > 0$  时  $\varphi(x) \geq 0$ , 即

$$(x^2 - 1) \ln x \geq (x - 1)^2 \quad (x > 0).$$

**方法 II** 令  $\varphi(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ , 有

$$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 1}{x(x+1)^2} > 0 \quad (\text{当 } x > 0).$$

所以  $\varphi(x)$  严格增加, 又  $\varphi(1) = 0$ , 所以当  $0 < x < 1$  时,  $\varphi(x) < 0$ ; 当  $1 < x < +\infty$  时,  $\varphi(x) > 0$ . 于是当  $x > 0$  时,

$$(x^2 - 1)\varphi(x) = (x^2 - 1)\ln x - (x - 1)^2 \geq 0,$$

即

$$(x^2 - 1)\ln x \geq (x - 1)^2.$$

**例 2.76** 证明不等式

$$1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2} \quad (x \in \mathbf{R}).$$

**解析** 记

$$f(x) = 1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2},$$

则  $f(0) = 0$ , 且

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \end{aligned}$$

由  $f'(x) = 0$  得  $x = 0$ , 又

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} > 0 \quad (x \in \mathbf{R}),$$

所以  $f'(x)$  在  $\mathbf{R}$  上严格增. 因  $f'(0) = 0$ , 因此  $x < 0$  时  $f'(x) < 0$ , 故  $f(x)$  严格减;  $x > 0$  时  $f'(x) > 0$ , 故  $f(x)$  严格增. 而  $f(0) = 0$ , 由此推知  $x \neq 0$  时  $f(x) > 0$ , 故  $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ , 即原不等式成立.

**例 2.77** 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 且  $f''(x) > 0$ , 证明  $f(x) \geq x$ .

**解析** 方法 I

因为  $f(x)$  连续且具有一阶导数, 所以由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ , 知  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

令  $F(x) = f(x) - x$ , 则  $F(0) = 0$ . 由于  $F'(x) = f'(x) - 1$ , 所以  $F'(0) = 0$ .

又由

$$F''(x) = f''(x) > 0,$$

知  $F(0)$  是  $F(x)$  的极小值且  $F'(x)$  严格增, 故  $F(x)$  只有一个驻点, 从而  $F(0)$  是  $F(x)$  的最小值. 因此

$$F(x) \geq F(0) = 0,$$

即

$$f(x) \geq x.$$

**方法 II**  $f(0) = 0$  与  $f'(0) = 1$  的求法同方法 I, 由  $f(x)$  的泰勒公式知

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{2}f''(\xi) = x + \frac{x^2}{2}f''(\xi),$$

$\xi$  在 0 与  $x$  之间. 因为  $f''(\xi) > 0$ , 所以  $f(x) \geq x$ .

**方法 III**  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  的求法同方法 I, 由于  $f''(x) > 0$ , 所以  $f'(x)$  严格增. 当  $x > 0$  时, 应用拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = f(x) = f'(\xi)x,$$

$0 < \xi < x$ , 由于  $f'(\xi) > f'(0) = 1$ , 故  $x > 0$  时  $f(x) > x$ ;

当  $x < 0$  时, 同样应用拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = f(x) = f'(\eta)x,$$

这里  $x < \eta < 0, f'(\eta) < f'(0) = 1$ , 故  $x < 0$  时  $f(x) > x$ .

**例 2.78** 设

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_n \sin nx,$$

且  $|f(x)| \leq |\sin x|, a_1, a_2, \dots, a_n$  为实常数, 求证

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

**解析** **方法 I** 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( a_1 \frac{\sin x}{x} + a_2 \frac{\sin 2x}{x} + \cdots + a_n \frac{\sin nx}{n} \right) \\ &= a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{f(x)}{x} \right| = |a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n|.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

又由题意有  $\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|$ , 两边令  $x \rightarrow 0$  取极限即得

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

**方法 II** 因  $f(0) = 0$ , 应用拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x) - f(0)| = |f'(\xi)| |x| \\ &= |a_1 \cos \xi + 2a_2 \cos 2\xi + \cdots + na_n \cos n\xi| |x|, \end{aligned}$$

而  $|f(x)| \leq |\sin x|$ , 所以当  $|x| > 0$  时

$$|a_1 \cos \xi + 2a_2 \cos 2\xi + na_n \cos n\xi| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right|,$$

$\xi$  介于 0 与  $x$  之间, 令  $x \rightarrow 0$  (因而  $\xi \rightarrow 0$ ) 得

$$|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1.$$

**例 2.79** 求函数

$$f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$$

的极值, 其中  $n$  为正整数.

**解析**

$$f(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -e^{-x} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} \\ &= e^{-x} \left( -\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \right) = -\frac{x^n}{n!} e^{-x}, \end{aligned}$$

令  $f'(x) = 0$ , 可解得惟一驻点  $x = 0$ . 当  $n$  为奇数时,

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & x < 0, \\ < 0, & x > 0. \end{cases}$$

所以  $f(x)$  在  $x = 0$  取极大值  $f(0) = 1$ ; 而当  $n$  为偶数时,  $\forall x \neq 0$  有  $f'(x) < 0$ , 所以此时  $f(x)$  无极值.

**例 2.80** 设  $\alpha$  为正常数, 使得不等式  $\ln x \leq x^\alpha$  对一切  $x > 0$  成立, 求  $\alpha$  的最小值.

**解析** 当  $0 < x \leq 1$  时不等式  $\ln x \leq x^\alpha$  显然成立. 故可设  $x > 1$ , 此时原不等式等价于

$$\ln \ln x \leq \alpha \ln x, \quad \text{即 } \alpha \geq \frac{\ln \ln x}{\ln x},$$

所以欲求  $\alpha$  的最小值等价于求函数  $f(x) = \frac{\ln \ln x}{\ln x}$  的最大值. 由

$$f'(x) = \frac{1}{\ln^2 x} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \ln \ln x \right),$$



令  $f'(x) = 0$  得惟一驻点  $x = e^e$ , 且当  $1 < x < e^e$  时  $f'(x) > 0$ , 当  $x > e^e$  时  $f'(x) < 0$ , 故  $f(e^e) = \frac{1}{e}$  为  $f(x)$  的极大值, 即最大值, 所以所求  $\alpha$  的最小值为  $\frac{1}{e}$ .

**例 2.81** 设  $f(x) = xe^x$ , 求  $f^{(n)}(x)$  的极值.

**解析** 对  $f(x)$  逐次求导得

$$f^{(n)}(x) = e^x(x+n), \quad f^{(n+1)}(x) = e^x(x+n+1),$$

由  $f^{(n+1)}(x) = 0$  得  $x_0 = -(n+1)$ , 且  $x < x_0$  时  $f^{(n+1)}(x) < 0$ ,  $x > x_0$  时  $f^{(n+1)}(x) > 0$ , 所以当  $x < x_0$  时  $f^{(n)}(x)$  严格减, 当  $x > x_0$  时  $f^{(n)}(x)$  严格增, 故  $f^{(n)}(x)$  在  $x_0$  处取极小值, 其极小值为

$$f^{(n)}(x_0) = -e^{-(n+1)} = \frac{-1}{e^{n+1}}.$$

**例 2.82** 曲线  $y = e^{1/x^2} \arctan \frac{x^2+x+1}{(x-1)(x+2)}$  的渐近线有 ( ).

(A) 1 条                      (B) 2 条                      (C) 3 条                      (D) 4 条

**解析** 由于

$$f(+\infty) = \frac{\pi}{4}, \quad f(-\infty) = \frac{\pi}{4},$$

所以有水平渐近线  $y = \frac{\pi}{4}$ . 由于  $x \rightarrow +\infty$  时, 或  $x \rightarrow -\infty$  时  $f(x)$  皆

与  $y = \frac{\pi}{4}$  无限接近, 所以无斜渐近线. 又

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty,$$

所以又有一条铅直渐近线  $x = 0$ . 即共有 2 条渐近线. 故选(B).

**例 2.83** 设  $f(x) = (x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ , 求  $y = f(x)$  的极值和渐近线.

**解析** 由于

$$f'(x) = \frac{x(1+x)}{1+x^2} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x},$$

令  $f'(x)=0$  解得驻点为  $x=0, -1$ . 因  $x < -1$  时  $f'(x) > 0$ ;  $-1 < x < 0$  时  $f'(x) < 0$ ;  $x > 0$  时  $f'(x) > 0$ . 所以  $f(-1) = -2e^{\frac{\pi}{4}}$  为极大值;  $f(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$  为极小值.

因函数  $f(x)$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 所以  $y=f(x)$  无铅直渐近线. 由于

$$f(+\infty) = +\infty, \quad f(-\infty) = -\infty,$$

所以  $y=f(x)$  无水平渐近线. 因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = e^{\pi},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^{\pi}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\pi}x(e^{\arctan x - \frac{\pi}{2}} - 1) - e^{\pi}$$

$$\begin{aligned} &= e^{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} - e^{\pi} \\ &\stackrel{0}{=} e^{\pi} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} - e^{\pi} = -2e^{\pi}, \end{aligned}$$

所以  $y=e^{\pi}x-2e^{\pi}$  为一条斜渐近线. 又因为

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x} - 1) - 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\pi}{2} + \arctan x}{\frac{1}{x}} - 1 \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\frac{1+x^2}{-1/x^2}} - 1 = -2,
 \end{aligned}$$

所以  $y=x-2$  为另一条斜渐近线.

**例 2.84** 求曲线  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$  的渐近线.

**解** 由  $e + \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x > 0$  或  $x < -\frac{1}{e}$ , 所以函数  $y = x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right)$  的定义域为

$$\left\{x \mid x < -\frac{1}{e} \text{ 或 } x > 0\right\}.$$

因

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) &\stackrel{\frac{1}{x} = t}{=} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e+t)}{t} = 0, \\
 \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}^-} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) &= +\infty,
 \end{aligned}$$

所以原曲线有铅直渐近线  $x = -\frac{1}{e}$ . 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = -\infty,$$

所以原曲线无水平渐近线. 又由

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) \quad \left( \text{令 } \frac{1}{x} = t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{t}{e}}{t} = \frac{1}{e},$$

所以原曲线有斜渐近线  $y = ax + b = x + \frac{1}{e}$ . 最后由

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \ln\left(e + \frac{1}{x}\right) - 1 \right) \quad \left( \text{令 } \frac{1}{x} = t \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\ln(e+t) - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\ln\left(1 + \frac{t}{e}\right)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{\frac{t}{e}}{t} = \frac{1}{e},$$

所以在  $x \rightarrow -\infty$  的方向的斜渐近线仍是  $y = x + \frac{1}{e}$ .

**例 2.85** 设  $y = y(x)$  由方程

$$x^3 + y^3 - 2xy = 0$$

确定, 试求曲线  $y = y(x)$  的渐近线.

**解** 因  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow A (A \in \mathbf{R})$  对上式不可能成立 (否则由  $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{2y}{x^2}$  可导致  $1 = 0$ , 不可能); 同样  $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow A (A \in \mathbf{R})$  对上式也不可能成立, 故曲线  $y = y(x)$  无水平渐近线.

因  $x \rightarrow a (a \in \mathbf{R}), y \rightarrow \infty$  对上式亦不可能成立, 故曲线  $y = y(x)$  不存在铅直渐近线.

由于  $x \neq 0$  时由原方程得  $1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - 2 \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x} = 0$ , 令  $x \rightarrow \infty$  得

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = -1,$$

又

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} (y + x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2xy}{x^2 - xy + y^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

故  $y = -x - \frac{2}{3}$  为原曲线的斜渐近线.

**例 2.86** 已知函数  $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ , 求

- (1) 增减区间及极值;
- (2) 凹凸区间及拐点;
- (3) 渐近线.

**解析** 所给函数的定义域为  $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ .

$$y' = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3},$$

令  $y' = 0$ , 得驻点  $x = 0$  及  $x = 3$ .

$$y'' = \frac{6x}{(x-1)^4},$$

令  $y'' = 0$ , 得  $x = 0$ . 列表讨论如下:

| $x$   | $(-\infty, 0)$ | 0  | $(0, 1)$ | $(1, 3)$ | 3   | $(3, +\infty)$ |
|-------|----------------|----|----------|----------|-----|----------------|
| $y'$  | +              | 0  | +        | -        | 0   | +              |
| $y''$ | -              | 0  | +        | +        | +   | +              |
| $y$   | ↑凸             | 拐点 | ↑凹       | ↓凹       | 极小值 | ↑凹             |

由此可知: (1) 函数的单调增区间为  $(-\infty, 1)$  和  $(3, +\infty)$ , 单调减区间为  $(1, 3)$ ; 极小值为  $y(3) = \frac{27}{4}$ .

(2) 函数图形在区间 $(-\infty, 0)$ 内是凸的, 在区间 $(0, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 内是凹的; 拐点为点 $(0, 0)$ .

(3) 由  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$ , 知  $x=1$  是函数的铅直渐近线; 又

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right] = 2,$$

故  $y = x + 2$  是函数的斜渐近线.

**例 2.87** 设  $y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ , 试讨论单调性, 极值, 凸性, 拐点, 渐近线, 并作简图.

**解析** 用一阶导数讨论单调性并求极值, 用二阶导数讨论凸性并求拐点. 因

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \quad y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4},$$

令  $y' = 0$  解得驻点  $x = -1, 5$ ; 令  $y'' = 0$  解得  $x = -1$ . 列表讨论如下:

| $x$   | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 1)$ | $(1, 5)$ | $5$ | $(5, +\infty)$ |
|-------|-----------------|------|-----------|----------|-----|----------------|
| $y'$  | +               | 0    | +         | -        | 0   | +              |
| $y''$ | -               | 0    | +         | +        | +   | +              |
| $y$   | ↑ 上凸            | 0    | ↑ 下凸      | ↓ 下凸     | 极小值 | ↑ 下凸           |

所以  $y$  在 $(-\infty, 1)$ 与 $(5, +\infty)$ 上单调增, 在 $(1, 5)$ 上单调减; 在 $(-\infty, -1)$ 上为上凸, 在 $(-1, 1)$ 与 $(1, +\infty)$ 上为下凸;  $y(5) = \frac{27}{2}$  为极小值;  $(-1, 0)$  为拐点;

由于  $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ , 所以  $x=1$  为铅直渐近线; 由于

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (y - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left( \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} - x \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{(x-1)^2} = 5,
 \end{aligned}$$

所以,  $y = ax + b = x + 5$  为斜渐近线.

简图如图 2.2.

**例 2.88** 作函数

$$y = (x-2)e^{-\frac{1}{x}}$$

的图形.

**解析** 函数的定义域为  $x \neq 0$ . 因

$$y' = \frac{(x+2)(x-1)}{x^2} e^{-\frac{1}{x}},$$

$$y'' = \frac{5x-2}{x^4} e^{-\frac{1}{x}},$$

令  $y' = 0$  得驻点为  $x = -2, 1$ ; 令  $y'' = 0$  得  $x = \frac{2}{5}$ . 下面用表格展示  $y'$  与  $y''$  在不同区间上的符号以及函数的单调性与凸性等性质.

| $x$   | $(-\infty, -2)$ | $-2$ | $(-2, 0)$ | $(0, \frac{2}{5})$ | $\frac{2}{5}$ | $(\frac{2}{5}, 1)$ | $1$ | $(1, +\infty)$ |
|-------|-----------------|------|-----------|--------------------|---------------|--------------------|-----|----------------|
| $y'$  | +               | 0    | -         | -                  | -             | -                  | 0   | +              |
| $y''$ | -               | -    | -         | -                  | 0             | +                  | +   | +              |
| $y$   | ↑ 凸             | 极大   | ↓ 凸       | ↓ 凸                | 拐点            | ↓ 凹                | 极小  | ↑ 凹            |

函数  $y(x)$  在  $x = -2$  取极大值  $-4\sqrt{e}$ , 在  $x = 1$  取极小值  $-\frac{1}{e}$ ; 点  $(\frac{2}{5}, -\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$  为拐点. 又因

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} y &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} y &= -\infty; \\
 \lim_{x \rightarrow 0-} y &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 0+} y &= 0;
 \end{aligned}$$

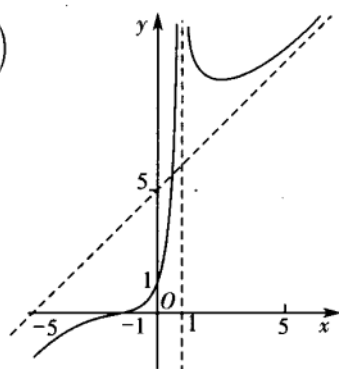


图 2.2

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - ax)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 2) e^{-\frac{1}{x}} - x \quad \left(x = \frac{1}{t}\right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - 2t)e^{-t} - 1}{t}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} (-3 + 2t)e^{-t} = -3,$$

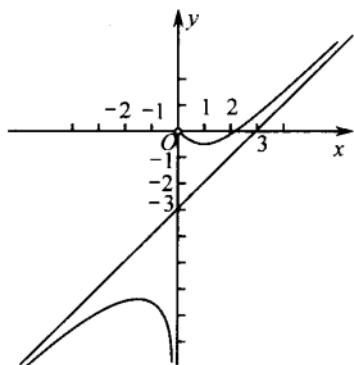


图 2.3

所以有铅直渐近线  $x = 0$ , 斜渐近线  $y = x - 3$ . 函数的图形如图 2.3.

**例 2.89** 给定曲线  $y = \frac{1}{x^2}$ , 求该曲线在横坐标为  $x_0$  的点处的切线方程, 并求该切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

**解析** 因  $y' = -\frac{2}{x^3}$ , 故所求切线方程为

$$y - \frac{1}{x_0^2} = -\frac{2}{x_0^3}(x - x_0).$$

令  $x = 0$  得  $y = \frac{3}{x_0^2}$ ; 令  $y = 0$  得  $x = \frac{3}{2}x_0$ . 设切线被坐标轴所截线段长度为  $d$ , 则

$$d^2 = \frac{9}{x_0^4} + \frac{9}{4}x_0^2.$$

由  $(d^2)' = 9\left(-\frac{4}{x_0^5} + \frac{1}{2}x_0\right) = 0$  得  $x_0 = \pm\sqrt{2}$ . 根据问题的几何意义, 长度  $d$  的最小值存在, 故  $d$  的最小值为

$$\min d = d(\pm\sqrt{2}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}.$$

**例 2.90** 设  $PQ$  是抛物线  $x^2 = 4y$  的弦, 它在此抛物线过  $P$  点的法线上, 求弦  $PQ$  长度的最小值.



**解析** 设  $P$  的坐标为  $(a, \frac{a^2}{4})$ , 由于  $x^2 = 4y$  关于  $y$  轴对称, 不妨设  $a > 0$ , 又  $y = \frac{1}{4}x^2, y'(a) = \frac{a}{2}$  所以过  $P$  点的法线方程为

$$y - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{2}{a}(x - a).$$

设该法线与抛物线的另一交点  $Q$  的坐标为  $(b, \frac{1}{4}b^2)$ , 则  $b = -a - \frac{8}{a}$ , 因而

$$l = |PQ|^2 = (a - b)^2 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2) = 4a^2 \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^3.$$

由于

$$\frac{dl}{da} = 8a \left(1 + \frac{4}{a^2}\right)^2 \left(1 - \frac{8}{a^2}\right),$$

令  $\frac{dl}{da} = 0$  得  $a = 2\sqrt{2}$  是惟一的驻点, 又据几何意义,  $l = |PQ|^2$  的最小值存在, 所以  $a = 2\sqrt{2}$  是最小值点, 其最小值为

$$\min |PQ| = 4\sqrt{2} \left(1 + \frac{4}{8}\right)^{\frac{3}{2}} = 6\sqrt{3}.$$

**例 2.91** 作半径为  $r$  的球的外切正圆锥. 问此圆锥的高  $h$  为何值时, 其体积  $V$  最小, 并求出该最小值.

**解析** 设圆锥底面圆半径为  $R$ , 如图 2.4.

$$SC = h, OC = OD = r, BC = R,$$

因  $\frac{BC}{SC} = \frac{OD}{SD}$ , 故  $\frac{R}{h} = \frac{r}{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}$ , 从而

$$R = \frac{rh}{\sqrt{h^2 - 2hr}}.$$

于是圆锥体积为

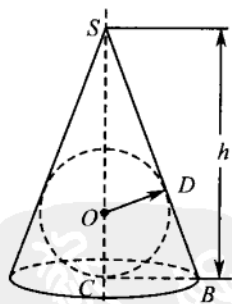


图 2.4

$$V(h) = \frac{\pi}{3} R^2 h = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2}{h-2r} \quad (2r < h < +\infty),$$

因  $V'(h) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{h^2 - 4rh}{(h-2r)^2}$ , 由  $V'(h) = 0$  解得  $h = 4r, h = 0$  (舍去).

由于圆锥的最小体积一定存在, 且  $h = 4r$  是  $V(h)$  在  $(2r, +\infty)$  内惟一驻点, 所以当  $h = 4r$  时  $V$  取最小值

$$V(4r) = \frac{\pi r^2}{3} \frac{(4r)^2}{(4r-2r)} = \frac{8\pi r^3}{3}.$$

**例 2.92** 某人自静止由 A 点开车, 到 B 点停止, 沿直线行驶, 全程长 1000m, 费时 60s, 试证该车在途中有一点加速度的绝对值不小于  $\frac{10}{9} \text{m/s}^2$ .

**解析** 设该车行驶中距离与时间的关系为  $y = s(t)$ , 由题意有  $s(0) = 0, s(60) = 1000, s'(0) = 0, s'(60) = 0$ . 将  $s(t)$  分别在  $t = 0$  与  $t = 60$  处展为一阶泰勒展式得

$$s(t) = s(0) + s'(0)t + \frac{s''(\xi_1)}{2}t^2 = \frac{s''(\xi_1)}{2}t^2, \quad 0 < \xi_1 < t; \quad (1)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= s(60) + s'(60)(t-60) + \frac{s''(\xi_2)}{2}(t-60)^2 \\ &= 1000 + \frac{s''(\xi_2)}{2}(t-60)^2, \quad t < \xi_2 < 60. \end{aligned} \quad (2)$$

在(1)、(2)两式中令  $t = 30$  得

$$s(30) = \frac{1}{2}s''(\xi_1) \cdot 900 = 1000 + \frac{1}{2}s''(\xi_2) \cdot 900,$$

即

$$s''(\xi_1) - s''(\xi_2) = \frac{20}{9}, \quad 0 < \xi_1 < 30 < \xi_2 < 60. \quad (3)$$

下面由(3)式证明: 对于  $\eta = \xi_1$  或  $\xi_2$  有  $|s''(\eta)| \geq \frac{10}{9}$ . (反证法)

设  $|s''(\xi_1)| < \frac{10}{9}, |s''(\xi_2)| < \frac{10}{9}$ , 则

$$|s''(\xi_1) - s''(\xi_2)| \leq |s''(\xi_1)| + |s''(\xi_2)| < \frac{10}{9} + \frac{10}{9} = \frac{20}{9},$$

此式与(3)式矛盾. 这表明在点  $\xi_1$  或  $\xi_2$  处加速度的绝对值不小于  $\frac{10}{9}\text{m/s}^2$ .



## 阶段复习试题一

1. 根据已知条件, 求函数表达式:

(1)  $f(x) = e^x, f(\varphi(x)) = 1 - x^2$ , 求  $\varphi(x)$  及其定义域;

(2)  $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}$ , 求  $f(x)$ ;

(3)  $z = y + f(\sqrt{x} - y)$ , 当  $y = 1$  时  $z = x$ , 求  $f(x)$ .

2. 设  $f(x) = ax + b, f(f(x)) = x$ , 求  $a, b$  的值.

3. 设  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ \frac{1}{x}, & x < 0, \end{cases}$  求  $f(f(x))$ .

4. 设  $f(x) = \begin{cases} 2-x, & 0 \leq x < 1, \\ x-1, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  求  $f^{-1}(x)$ .

5. 已知  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3}{n^2} = 2$ , 则对于给定的  $\epsilon = \frac{1}{100}$ , 要使  $n > N$  时

不等式  $\left| \frac{2n^2 + 3}{n^2} - 2 \right| < \epsilon$  成立, 求  $N$  的最小整数值.

6. 求下列极限:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{\sin x}}$ ; (2)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^m}{\ln x} \cdot \frac{x^n}{e^x} \quad (m, n \in \mathbf{N})$ ;

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$ ; (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})$ ;

(5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \sin x$ ; (6)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \sqrt[3]{x} + \cos \sqrt[3]{x} - e^{\sqrt[3]{x}}}{\ln(1 + \sqrt[3]{x^2})}$ ;

(7)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x^2 - 9) \ln(4+x)}{\arctan^2(x+3)}$ ; (8)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2 x}{1 - e^{-x^2}}$ ;

(9)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x + \ln(1+x^3)}{\tan^3 x}$ ;

$$(10) \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \tan\left(\frac{\pi}{4}x\right) \right]^{\tan \frac{\pi}{2}x};$$

$$(11) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\tan x}; \quad (12) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$(13) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a_1^{\frac{1}{x}} + a_2^{\frac{1}{x}} + \cdots + a_n^{\frac{1}{x}}}{n} \right)^x, \text{ 其中 } a_1, \cdots, a_n \text{ 为正常数};$$

$$(14) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x; \quad (15) \lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 100} + x);$$

$$(16) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+2+\cdots+n} - \sqrt{1+2+\cdots+(n-1)});$$

$$(17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}};$$

$$(18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} - 2}{x^2 \sin^2 x}.$$

7. 设数列  $\{x_n\}, \{y_n\}$  满足

$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots, y_1 > y_2 > \cdots > y_n > \cdots$ , 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 2$ , 试证数列  $\{x_n\}$  与  $\{y_n\}$  皆收敛.

8. 设  $x_1 = 1, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}}, n = 2, 3, \cdots$ , 试证明数列  $\{x_n\}$  收敛, 并求其极限.

9. 设  $x_{n+1} + \sqrt{1 - x_n} = 0, x_1 = 1$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

10. 用  $\epsilon-N$  语言证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 1}{3n^2 + 1} = \frac{4}{3}$ .

11. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$  试问  $f(x)$  在  $x = 0$  是否连续? 是否可导?

12. 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ x^2 + 1, & x \leq 0, \end{cases}$  试问  $f(x)$  在  $x = 0$  是否连续?

续?是否可导? $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续?

13. 设  $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln |x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  讨论  $f(x)$  在  $x=0$  的

连续性,可导性和导数的连续性.

14. 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - 1}{x^n + 1}$  的连续性.

15. 讨论函数  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x^{2n} - 1)}{x^{2n} + 1}$  的定义域,连续性,若有间断点指出其类型.

16. 设  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctan(1 + x^n)$ , 求  $f(x)$  的定义域,连续区间,并求间断点的类型.

17. 求  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ .

18. 求  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + x^n} \quad (x > 0)$ .

19. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right)$ .

20. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + n} \right)$ .

21. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $(1 + ax^2)^{\frac{1}{3}} - 1$  与  $\cos^2 x - 1$  为等价无穷小,求  $a$  值.

22. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,任取  $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a, b]$ , 求证: 存在  $\xi \in [a, b]$  使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)].$$

23. 设  $f'(a) = 2$ , 求  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+h) - f(a-2h))$ .

24. 设  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{(x-a)^2} = 1$ , 试讨论  $f(x)$  在  $x=a$  的可导性,并问  $f(a)$  是否为极值.

25. 设  $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2 + a^2), & x > 1, \\ \sin b(x-1), & x \leq 1, \end{cases}$   $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$

上可导,求  $a, b$  的值.

26. 函数  $f(x) = x^n$  在  $(1, 1)$  处的切线与  $x$  轴的交点为  $x_n$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ .

27. 设  $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \geq 0, \\ 2x, & x < 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

28. 设  $f(x) = \begin{cases} x \arctan \frac{1}{|x|}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  求  $f'(x)$ .

29.  $f(x) = x^2(|x| + x)^2$ , 求使  $f^{(n)}(0)$  存在的最高阶数.

30. 求下列导数:

(1)  $f(x) = \lim_{t \rightarrow x} \left(1 + \frac{2x}{t}\right)^t$ , 求  $f'(x)$ ;

(2)  $y = x \arcsin\left(x^2 + \frac{1}{4}\right)$ , 求  $y'(0)$ ;

(3)  $f(x) = \cos 2x$ , 求  $f^{(2n)}(x)$ ;

(4)  $y = (x + \sqrt{1+x^2})^x$ , 求  $y'$ ;

(5)  $y = x \arcsin \frac{x}{2} + \sqrt{4-x^2}$ , 求  $y''$ ;

(6)  $y = \frac{1}{\tan^2 2x}$ , 求  $y'$ ;

(7)  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ , 求  $y'$ ;

(8)  $y = x^{\tan x}$ , 求  $y'$ ;

(9)  $\arctan y = xe^y$ , 求  $y'$ ;

(10)  $y = x(2x+5)^2(3-x)^3$ , 求  $y^{(6)}$ .

31. 设  $y = y(x)$  由  $xy + e^{y^2} - x = 0$  确定, 试求该曲线在点  $(1, 0)$  的切线方程.

32. 设  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0, \\ a + \arctan bx, & x < 0, \end{cases}$  在  $x=0$  可导, 试求  $a, b$  的值.
33. 设  $f(x)$  在  $x=1$  处有连续导数,  $f'(1) = 2$ , 求  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{d}{dx} f(\cos \sqrt{x})$ .
34. 求证方程  $3ax^2 + 2bx - (a+b) = 0$  对任意常数  $a, b$  在  $(0, 1)$  上至少有一个根.
35. 求证  $a^2 - 3b < 0$  时方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  有惟一的实根.
36. 求证方程  $\ln x = ax + b$  至多有两个实根 ( $a, b$  为常数,  $a > 0$ ).
37. 设  $a > 0$ , 讨论方程  $\ln x = ax$  有几个实根.
38. 试证方程  $e^x = \frac{1}{2}ex^2$  只有一个实根.
39. 设  $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$ , 求证  $|f(b) - f(a)| \leq \frac{1}{4}(b-a)$ , 这里  $1 < a < 2, b > 3$ .
40. 求证下列不等式:
- (1)  $\frac{1}{1+x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x} \quad (x > 0);$
- (2)  $1 - \frac{x}{2} < \frac{1}{x} \ln(1+x) \quad (-1 < x < 0);$
- (3)  $x \ln^2 x < (x-1)^2 \quad (1 < x < 2);$
- (4)  $\frac{2}{1+2x} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0);$
- (5)  $\frac{x}{1+2x} < \ln \sqrt{1+2x} < x \quad (x > 0).$
41. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $2\xi(f(b) - f(a)) = (b^2 - a^2)f'(\xi)$ .



42. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(x) \neq 0$ , 求证: 存在  $\xi, \eta \in (a, b)$  使得

$$(b-a)e^{\eta}f'(\xi) = (e^b - e^a)f'(\eta).$$

43. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f(a)f(b) > 0$ , 且  $f'(x) \neq 0$ , 求证  $f(x)$  在  $[a, b]$  上不变号.

44. 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上三阶连续可导,  $f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f'(\frac{1}{2}) = 0$ , 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $|f'''(\xi)| \geq 12$ .

45. 若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导,  $f(a) = f(b) = 0$ , 又存在  $c \in (a, b)$  使得  $f(c) > 0$ , 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f''(\xi) < 0$ .

46. 求  $f(x) = (x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n)e^{-x}$  的极值点.

47. 讨论  $f(x) = x^2 \ln x$  的单调性, 凸性, 求极值与拐点.

48. 求函数  $y = \frac{\ln x}{x}$  的定义域, 单调区间, 极值, 凸性, 拐点与渐近线, 并作图.

49. 设  $f(x) = \ln \frac{1+2x}{1+x}$ , 试求  $f(x)$  的定义域, 研究单调性, 凸性, 渐近线并作图.

50. 求下列函数的渐近线:

$$(1) f(x) = e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{x^2 + x + 1}{x - 2};$$

$$(2) f(x) = \frac{x^3}{2(x-1)^2};$$

$$(3) f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1}.$$



# 3

## 不定积分与定积分

### 3.1 基本概念与内容提要

#### 1) 原函数和不定积分概念

若函数  $f(x)$ ,  $F(x)$  满足  $F'(x) = f(x)$ , 则称  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数. 若  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则  $f(x)$  的全体原函数是  $F(x) + C$  ( $C$  为任意常数).  $f(x)$  的全体原函数称为  $f(x)$  的不定积分, 记为

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

#### 2) \* 不定积分的性质和基本积分公式

$$\int f'(x) dx = f(x) + C; \quad \left( \int f(x) dx \right)' = f(x);$$

$$\int x^\mu dx = \frac{1}{\mu+1} x^{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1); \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C;$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C; \quad \int \csc^2 x dx = -\cot x + C;$$

$$\int \sec x \tan x dx = \sec x + C;$$

$$\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C;$$



$$\int \sec x dx = \ln |\sec x + \tan x| + C;$$

$$\int \csc x dx = \ln |\csc x - \cot x| + C;$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C \left( -\arccos \frac{x}{a} + C \right);$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C \left( -\frac{1}{a} \operatorname{arccot} \frac{x}{a} + C \right);$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$$

### 3) 不定积分的计算

#### (1) \* 换元积分公式.

$$\begin{aligned} \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx &= \int f(u) du = F(u) + C \\ &= F(\varphi(x)) + C \quad (F'(u) = f(u)); \\ \int f(x) dx &= \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \\ &= F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C, \end{aligned}$$

这里  $\varphi(t)$  严格单调,  $F'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ .

#### (2) \* 分部积分公式.

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

(3) 有理函数的积分. 任一有理函数(又称有理分式, 它是两个多项式函数的商)可分解为一多项式(对于真分式此为 0 多项式)和若干部分分式的和, 这些部分分式的形式为

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{(x-a)^n} dx \quad (n \in \mathbf{N}), \\ &\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} dx \quad (p^2 < 4q, n \in \mathbf{N}). \end{aligned}$$

(4) 简单的无理函数的积分. 通常是先作换元变换, 使被积函数有理化后再积分. 常用的变换有:

$$\int R\left[x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right] dx, \quad \text{令 } \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \text{令 } x = a \sin t \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad \text{令 } x = a \tan t \quad \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad x = \sec t \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}, \text{ 或 } \frac{\pi}{2} < t < \pi\right);$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, 令}$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{ax} + t;$$

当  $a < 0$  时, 令  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - \alpha)$  或  $t(\beta - x)$ , 这里  $\alpha, \beta$  是  $ax^2 + bx + c = 0$  的两个根 ( $\alpha < \beta$ ).

(5) 三角函数有理式的积分. 作三角函数的换元代换, 如  $\sin x = t, \cos x = t, \tan x = t, \tan \frac{x}{2} = t$  等化为有理函数的积分. 当令  $\tan \frac{x}{2} = t$  时,

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2},$$

$$dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

#### 4) 定积分基本概念

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有定义, 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将  $[a, b]$  任意地分割为  $n$  个小区间, 记  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , 令

$$\lambda = \max\{\Delta x_i \mid i = 1, 2, \cdots, n\},$$

任取  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , 若和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  在  $\lambda \rightarrow 0$  时有有限极限, 则

定义

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

并称  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积, 称  $f(x)$  为被积函数.

函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积的必要条件是  $f(x)$  在该闭区间上有界. 当  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 或  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界, 且只有有限个间断点时必可积.

函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的定积分的几何意义是表示由  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$  所围若干块图形的面积的代数和(若图形在  $x$  轴上方, 其面积取正值; 当图形在  $x$  轴下方, 其面积取负值).

### 5) \* 定积分的主要性质

(1) 保向性.

若  $f(x), g(x)$  可积,  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

若  $f(x), g(x)$  皆在  $[a, b]$  上连续,  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$ ,  $f(x) \not\equiv g(x)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx.$$

(2) 可加性.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

当此式中三个定积分皆可积时, 对  $a, b, c$  的任意大小关系此式皆成立.

(3) 积分中值定理.

若  $f(x), g(x)$  皆在  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  定号 ( $\geq 0$ , 或  $\leq 0$ ), 则存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx.$$

### 6) 函数的平均值

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 称

$$\bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

为函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的平均值.

### 7) \* 变限的定积分

若  $f(x)$  连续,  $\varphi(x)$  与  $\psi(x)$  可导, 则有

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) = f(x);$$

$$\frac{d}{dx} \left( \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right) = \varphi'(x) f(\varphi(x));$$

$$\frac{d}{dx} \left( \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right) = \varphi'(x) f(\varphi(x)) - \psi'(x) f(\psi(x)).$$

当  $f(x)$  连续时,  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  是  $f(x)$  的一个原函数 (即  $F'(x) = f(x)$ ).

### 8) \* 定积分的计算

#### (1) 牛顿-莱布尼兹公式.

若  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

#### (2) 换元积分公式.

设  $\varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  上连续可导,  $f(x)$  在  $\varphi(t)$  的值域上连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, & \text{当 } a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta), \\ \int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, & \text{当 } a = \varphi(\beta), b = \varphi(\alpha). \end{cases}$$

#### (3) 分部积分公式.

设  $u(x), v(x)$  在  $[a, b]$  上连续可导, 则有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

### 9) 关于奇函数、偶函数和周期函数的定积分性质

若  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上为奇函数或偶函数, 且可积, 则有

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } f(x) \text{ 为奇函数,} \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{当 } f(x) \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

若  $f(x)$  是周期为  $T$  的可积函数, 则  $\forall a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$ , 有

$$\int_a^{a+nT} f(x)dx = n\int_0^T f(x)dx.$$

## 3.2 典型习题与试题解析

**例 3.1** 设函数  $f(x)$  满足

$$f'(\ln x) = 1 - x, \quad f(0) = 0,$$

试求  $f(x)$ .

**解析**  $f'(\ln x)$  中的导数不是对  $x$  求导, 而是对  $u (= \ln x)$  求导, 所以首先应作换元变换, 令  $u = \ln x$ , 则原式化为

$$f'(u) = 1 - e^u, \quad f(0) = 0.$$

积分得

$$f(u) = u - e^u + C,$$

故  $f(x) = x - e^x + C$ , 由  $f(0) = 0$  得  $C = 1$ , 故

$$f(x) = x - e^x + 1.$$

**例 3.2** 设  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\cos x}{x}$ , 试求  $\int x^3 f'(x)dx$ .

**解析** 由题意得

$$\int f(x)dx = \frac{\cos x}{x} + C,$$

求导得

$$f(x) = \left( \frac{\cos x}{x} \right)' = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2},$$

应用分部积分法得

$$\begin{aligned}
 \int x^3 f'(x) dx &= \int x^3 df(x) = x^3 f(x) - \int f(x) 3x^2 dx \\
 &= -x(x \sin x + \cos x) + 3 \int (x \sin x + \cos x) dx \\
 &= -x(x \sin x + \cos x) - 3 \int x d(\cos x) + 3 \sin x \\
 &= -x(x \sin x + \cos x) - 3x \cos x + 3 \int \cos x dx + 3 \sin x \\
 &= -x^2 \sin x - 4x \cos x + 6 \sin x + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.3** 设  $f(x)$  可导,  $f(x)$  的一个原函数为  $F(x)$ ,  $f(x)$  的反函数  $f^{-1}(x)$  存在, 试求

$$\int f^{-1}(x) dx.$$

**解析** 令  $f^{-1}(x) = u$ , 则  $x = f(u)$ ,

$$\begin{aligned}
 \int f^{-1}(x) dx &= \int u df(u) = uf(u) - \int f(u) du \\
 &= uf(u) - F(u) + C \\
 &= xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.4** 求  $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$ .

**解析** **方法 I** 由  $x(4-x) > 0$  得  $0 < x < 4$ , 所以

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt{4-x}} dx = 2 \int \frac{1}{\sqrt{4-(\sqrt{x})^2}} d\sqrt{x} \\
 &= 2 \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} + C.
 \end{aligned}$$

**方法 II**

$$\text{原式} = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x-2)^2}} dx = \arcsin \frac{x-2}{2} + C.$$

**例 3.5** 求  $\int \frac{2^x \cdot 3^x}{4^x - 9^x} dx$ .



解析

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{2^x \cdot 3^x}{(2^x)^2 - (3^x)^2} dx = \int \frac{\frac{3^x}{2^x}}{1 - \left(\frac{3^x}{2^x}\right)^2} dx \\
 &= \frac{1}{\ln \frac{3}{2}} \int \frac{1}{1-u^2} du \quad \left(u = \frac{3^x}{2^x}\right) \\
 &= \frac{1}{2 \ln \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + C = \frac{1}{2 \ln \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{2^x + 3^x}{2^x - 3^x} \right| + C.
 \end{aligned}$$

例 3.6 求  $\int \frac{\tan x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx$ .

解析

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{\tan x}{b^2 + a^2 \tan^2 x} d(\tan x) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{b^2 + a^2 \tan^2 x} d(\tan^2 x) \\
 &= \frac{1}{2a^2} \ln |b^2 + a^2 \tan^2 x| + C.
 \end{aligned}$$

例 3.7 求  $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ .

解析 方法 I

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin x}\right) dx = x - \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \\
 &= x - \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx = x - \tan x + \sec x + C.
 \end{aligned}$$

方法 II

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= x - \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = x - \int \frac{1}{\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right)^2} dx \\
 &= x - \int \frac{2}{\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2} d\left(1 + \tan \frac{x}{2}\right) = x + \frac{2}{1 + \tan \frac{x}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

## 方法 III

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= x - \int \frac{1}{1 + \sin x} dx = x - \int \frac{1}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx \\
 &= x - \int \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} dx = x + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) + C.
 \end{aligned}$$

例 3.8 计算  $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$ .

解析 方法 I

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} = \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{1}{4} \int \frac{d\left(\tan \frac{x}{2}\right)}{\tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \int \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} d\left(\tan \frac{x}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{8} \tan^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

## 方法 II

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)} = \int \frac{\sin x dx}{2(1 - \cos^2 x)(1 + \cos x)} \\
 &\stackrel{\cos x = u}{=} \frac{1}{2} \int \frac{du}{(1 - u)(1 + u)^2} \\
 &= -\frac{1}{8} \int \left( \frac{1}{1 - u} + \frac{3 + u}{(1 + u)^2} \right) du \\
 &= \frac{1}{8} \left[ \ln |1 - u| - \ln |1 + u| + \frac{2}{1 + u} \right] + C \\
 &= \frac{1}{8} \left[ \ln(1 - \cos x) - \ln(1 + \cos x) + \frac{2}{1 + \cos x} \right] + C.
 \end{aligned}$$

方法 III 令  $\tan \frac{x}{2} = t$ , 则  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $x =$

$$2\arctan t, dx = \frac{2}{1+t^2} dt,$$

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1}{2 \cdot \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \frac{1}{4} \int \frac{1+t^2}{t} dt, \\ &= \frac{1}{4} \ln |t| + \frac{1}{8} t^2 + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + \frac{1}{8} \left( \tan \frac{x}{2} \right)^2 + C.\end{aligned}$$

**例 3.9** 求  $\int \frac{1}{\sin 2x \cos x} dx$ .

**解析** 原式  $= \frac{1}{2} \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^2 x} dx$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{2} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \frac{1}{2} \sec x + \frac{1}{2} \ln |\csc x - \cot x| + C.\end{aligned}$$

**例 3.10** 求  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x - \cos x} dx$ .

**解析** 因  $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - 2\sin x \cos x$ , 所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= -\frac{1}{2} \int \frac{(\sin x - \cos x)^2 - 1}{\sin x - \cos x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \int (\sin x - \cos x) dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} dx \\ &= \frac{1}{2} (\sin x + \cos x) + \\ &\quad \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \csc\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.\end{aligned}$$

**例 3.11** 求  $\int \frac{\sin x \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}{2 + \sin^2 x} dx$ .

解析

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{\sqrt{1+\sin^2 x}}{2(2+\sin^2 x)} d(\sin^2 x) \\
 &= \int \frac{t^2}{t^2+1} dt \quad (t = \sqrt{1+\sin^2 x}) \\
 &= t - \arctan t + C \\
 &= \sqrt{1+\sin^2 x} - \arctan \sqrt{1+\sin^2 x} + C.
 \end{aligned}$$

例 3.12 求  $\int \frac{1}{1+2\tan x} dx$ .

解析 方法 I

$$\text{原式} = \int \frac{\cos x}{\cos x + 2\sin x} dx,$$

令

$$\cos x = A(\cos x + 2\sin x) + B(\cos x + 2\sin x)'$$

由此式可解出  $A = \frac{1}{5}, B = \frac{2}{5}$ , 故

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{5} \int dx + \frac{2}{5} \int \frac{(\cos x + 2\sin x)'}{\cos x + 2\sin x} dx \\
 &= \frac{1}{5} x + \frac{2}{5} \ln |\cos x + 2\sin x| + C.
 \end{aligned}$$

方法 II 令  $\tan x = t$  则

$$\text{原式} = \int \frac{1}{(1+2t)(1+t^2)} dt,$$

令

$$\frac{1}{(1+2t)(1+t^2)} = \frac{A}{1+2t} + \frac{Bt+D}{1+t^2},$$

由此式可解出  $A = \frac{4}{5}, B = -\frac{2}{5}, D = \frac{1}{5}$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{4}{5} \int \frac{1}{1+2t} dt - \frac{2}{5} \int \frac{t}{1+t^2} dt + \frac{1}{5} \int \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \frac{2}{5} \ln |1+2t| - \frac{1}{5} \ln(1+t^2) + \frac{1}{5} \arctan t + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{5} \ln \left| \frac{1+2\tan x}{\sec x} \right| + \frac{1}{5}x + C \\
 &= \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} \ln |\cos x + 2\sin x| + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.13** 求  $\int \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$ .

**解析** 因  $1 + \sin^2 x = 2 - \cos^2 x$ , 故

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{1 + \sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{2 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1}{1 + 2\tan^2 x} d(\tan x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{1 + (\sqrt{2}\tan x)^2} d(\sqrt{2}\tan x) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + C, \\
 -\int \frac{\sin x}{1 + \sin^2 x} dx &= \int \frac{1}{2 - \cos^2 x} d(\cos x) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos x}{\sqrt{2} - \cos x} \right| + C, \\
 -\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx &= -\int \frac{1}{1 + \sin^2 x} d(\sin x) \\
 &= -\arctan(\sin x) + C,
 \end{aligned}$$

三式相加即得

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}\tan x) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos x}{\sqrt{2} - \cos x} \right| - \\
 &\quad \arctan(\sin x) + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.14** 求  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx$ .

**解析** 因

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2 + \sin 2x} &= \sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2} = \sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}, \\
 \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx &= \int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} dx
 \end{aligned}$$

$$= \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}| + C_1, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx &= \int \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} dx \\ &= \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} + C_2, \end{aligned} \quad (2)$$

((2) - (1)) ÷ 2 得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \left( \arcsin \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} - \right. \\ &\quad \left. \ln |\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}| \right) + C. \end{aligned}$$

**例 3.15** 求  $\int \frac{x \sin^4 \frac{x}{2}}{\sin^3 x} dx$ .

**解析** 应用三角函数半角公式化简原式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \int \frac{x(1 - \cos x)^2 \sin x}{\sin^3 x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x(1 - \cos x)^2 \sin x}{(1 - \cos^2 x)^2} dx \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{x}{(1 + \cos x)^2} d\cos x = \frac{1}{4} \int x d\left(\frac{1}{1 + \cos x}\right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{x}{1 + \cos x} - \int \frac{1}{1 + \cos x} dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[ \frac{x}{1 + \cos x} - \int \sec^2 \frac{x}{2} d\left(\frac{x}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{x}{1 + \cos x} - \tan \frac{x}{2} \right) + C. \end{aligned}$$

**例 3.16** 求  $\int (x-1) \arctan x dx$ .

**解析** 应用分部积分法,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x-1)^2 \\ &= \frac{1}{2} (x-1)^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{(x-1)^2}{1+x^2} dx \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(x-1)^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2x}{1+x^2}\right) dx \\
 &= \frac{1}{2}(x-1)^2 \arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
 \end{aligned}$$

**评注** 本题若将原式拆项为两式, 分别用分部积分法计算将比较繁琐.

**例 3.17** 求  $\int e^x \arctan e^x dx$ .

**解析** 原式  $= \int \arctan e^x d(e^x) = e^x \arctan e^x - \int e^x d(\arctan e^x)$

$$\begin{aligned}
 &= e^x \arctan e^x - \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} dx \\
 &= e^x \arctan e^x - \frac{1}{2} \ln(1+e^{2x}) + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.18** 求  $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$ .

**解析 方法 I**

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx &= \int \frac{\arctan x}{x^2} dx - \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} + \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx^2 - \\
 &\quad \frac{1}{2} (\arctan x)^2 \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + \\
 &\quad \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.
 \end{aligned}$$

**方法 II** 令  $x = \tan t$ , 则

$$\text{原式} = \int t(\csc^2 t - 1) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -t \cot t + \int \frac{\cos t}{\sin t} dt - \frac{1}{2} t^2 \\
 &= -t \cot t + \ln |\sin t| - \frac{1}{2} t^2 + C \\
 &= -\frac{\arctan x}{x} + \ln \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{2} (\arctan x)^2 + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.19** 求  $\int e^{2x} (1 + \tan x)^2 dx$ .

**解析** 方法 I

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int e^{2x} (1 + \tan^2 x + 2 \tan x) dx \\
 &= \int e^{2x} d(\tan x) + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= e^{2x} \tan x - 2 \int e^{2x} \tan x dx + 2 \int e^{2x} \tan x dx \\
 &= e^{2x} \tan x + C.
 \end{aligned}$$

**评注** 本题中  $\int e^{2x} \tan x dx$  的原函数无法求出, 必须从另一积分入手, 分部积分后将其不可积出的积分消去.

**方法 II** 直接对原式用分部积分,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{2} \int (1 + \tan x)^2 d(e^{2x}) \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} (1 + \tan x)^2 - \int e^{2x} (1 + \tan x) \sec^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} (1 + \tan x)^2 - \int e^{2x} \sec^2 x dx - \int e^{2x} \tan x \sec^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} (1 + \tan x)^2 - \frac{1}{2} \int \sec^2 x d(e^{2x}) - \int e^{2x} \tan x \sec^2 x dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} (1 + \tan x)^2 - \frac{1}{2} e^{2x} \sec^2 x + \\
 &\quad \frac{1}{2} \int e^{2x} 2 \sec^2 x \tan x dx - \int e^{2x} \tan x \sec^2 x dx
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} e^{2x} (1 + \tan x)^2 - \frac{1}{2} e^{2x} \sec^2 x + C \\
 &= e^{2x} \tan x + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.20** 求  $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} e^x dx$ .

**解析**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2}{2\cos^2 \frac{x}{2}} e^x dx = \frac{1}{2} \int \left(1 + \tan \frac{x}{2}\right)^2 e^x dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(\sec^2 \frac{x}{2} + 2\tan \frac{x}{2}\right) e^x dx \\
 &= \int e^x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) + \int \tan \frac{x}{2} \cdot e^x dx \\
 &= e^x \tan \frac{x}{2} - \int e^x \tan \frac{x}{2} dx + \int e^x \tan \frac{x}{2} dx \\
 &= e^x \tan \frac{x}{2} + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.21** 求  $\int \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2} dx$ .

**解析** 方法 I 分部积分得

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{x}{1-x} (1 - \ln x) d\left(\frac{1}{x - \ln x}\right) \\
 &= \frac{x(1 - \ln x)}{(1-x)(x - \ln x)} - \int \frac{x - \ln x}{(1-x)^2} \frac{1}{x - \ln x} dx \\
 &= \frac{x(1 - \ln x)}{(1-x)(x - \ln x)} - \frac{1}{1-x} + C \\
 &= \frac{\ln x}{x - \ln x} + C.
 \end{aligned}$$

方法 II 分部积分得

$$\text{原式} = \int \frac{1 - \ln x}{x^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^2} dx = \int \frac{-1}{\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)^2} d\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x - \ln x} + C.$$

例 3.22 求  $\int \frac{1+x}{x(1-xe^x)} dx$ .

解析 因  $d(xe^x) = e^x(1+x)dx$ , 所以令  $xe^x = t$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{e^x(1+x)}{xe^x(1-xe^x)} dx = \int \frac{1}{t(1-t)} dt \\ &= \int \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{1-t} \right) dt = \ln \left| \frac{t}{1-t} \right| + C \\ &= \ln \left| \frac{xe^x}{1-xe^x} \right| + C. \end{aligned}$$

例 3.23 求  $\int \frac{1}{x(x^{10}+1)} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解析 原式} &= \int \frac{x^9}{x^{10}(x^{10}+1)} dx = \frac{1}{10} \int \left( \frac{1}{x^{10}} - \frac{1}{x^{10}+1} \right) d(x^{10}) \\ &= \frac{1}{10} \ln \left( \frac{x^{10}}{x^{10}+1} \right) + C \\ &= \ln |x| - \frac{1}{10} \ln(1+x^{10}) + C. \end{aligned}$$

例 3.24 求  $\int \frac{1}{x^4+1} dx$ .

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2+1) - (x^2-1)}{x^4+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} d\left(x - \frac{1}{x}\right) - \\ &\quad \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2} d\left(x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right| + C.$$

例 3.25 求  $\int \frac{x^2}{x^4-1} dx$ .

解析 应用恒等式  $\frac{1}{uv} = \frac{1}{A} \left( \frac{1}{u} \pm \frac{1}{v} \right)$  (其中  $v \pm u = A$ ) 将被积函数分解为部分分式,

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{x^2}{2x^2} \left( \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) + \frac{1}{2(x^2+1)} \\ &= \frac{1}{4(x-1)} - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{2(x^2+1)}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + \frac{1}{2} \arctan x + C. \end{aligned}$$

例 3.26 求  $\int \frac{1+x^4}{1+x^6} dx$ .

解析

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int \frac{1-x^2+x^4+x^2}{(1+x^2)(1-x^2+x^4)} dx \\ &= \int \frac{1}{1+x^2} dx + \int \frac{x^2}{1+x^6} dx \\ &= \arctan x + \frac{1}{3} \arctan (x^3) + C. \end{aligned}$$

例 3.27 求  $\int \frac{1}{(x^2-x-2)(x-1)^2} dx$ .

**解析** 因  $f(x) = \frac{1}{(x^2 - x - 2)(x - 1)^2} = \frac{1}{(x + 1)(x - 2)(x - 1)^2}$ ,  
将其分解为部分分式, 令

$$f(x) = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{E}{x - 1} + \frac{D}{(x - 1)^2},$$

则

$$A = f(x)(x + 1) \Big|_{x=-1} = \frac{1}{(x - 2)(x - 1)^2} \Big|_{x=-1} = -\frac{1}{12},$$

$$B = f(x)(x - 2) \Big|_{x=2} = \frac{1}{(x + 1)(x - 1)^2} \Big|_{x=2} = \frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned} E &= (f(x)(x - 1)^2)' \Big|_{x=1} = \left( \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} \right)' \Big|_{x=1} \\ &= \frac{1 - 2x}{(x + 1)^2(x - 2)^2} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$D = f(x)(x - 1)^2 \Big|_{x=1} = \frac{1}{(x + 1)(x - 2)} \Big|_{x=1} = -\frac{1}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= -\frac{1}{12} \int \frac{1}{1 + x} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x - 2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x - 1} dx - \\ &\quad \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx \\ &= -\frac{1}{12} \ln |1 + x| + \frac{1}{3} \ln |x - 2| - \frac{1}{4} \ln |x - 1| + \\ &\quad \frac{1}{2(x - 1)} + C. \end{aligned}$$

**例 3.28** 求  $\int \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^2}} dx$ .

**解析** 方法 I

$$\text{原式} = \int \frac{x^2}{2\sqrt{1 + x^2}} d(1 + x^2)$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \int \left( \sqrt{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) d(1+x^2) \\
 &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} - (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

**方法 II** 令  $x = \tan t$   $\left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{\sin^3 t}{\cos^4 t} dt = \int \frac{\cos^2 t - 1}{\cos^4 t} d(\cos t) = -\frac{1}{\cos t} + \frac{1}{3\cos^3 t} + C \\
 &= -\sec t + \frac{1}{3} \sec^3 t + C = -\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.29** 求  $\int \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} dx$ .

**解析** **方法 I**

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{1-2x}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx - \int \frac{2x}{\sqrt{1-(2x)^2}} dx \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} d(1-4x^2) \\
 &= \frac{1}{2} \arcsin 2x + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C.
 \end{aligned}$$

**方法 II** 令  $\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = t$ , 则  $x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ,  $dx = \frac{-2t}{(1+t^2)^2} dt$ ,

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= -2 \int \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int t d\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \frac{t}{1+t^2} - \int \frac{1}{1+t^2} dt \\
 &= \frac{t}{1+t^2} - \arctan t + C \\
 &= \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} \cdot \frac{1+2x}{2} - \arctan \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + C \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} - \arctan \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.30** 求  $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ .

**解析** 令  $x = \tan t$ , 则

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{\sec^2 t}{(2\tan^2 t + 1)\sec t} dt = \int \frac{\cos t}{2\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int \frac{1}{1 + \sin^2 t} d(\sin t) = \arctan(\sin t) + C \\ &= \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C.\end{aligned}$$

**例 3.31** 求  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}+\sqrt{1+x}} dx$ .

**解析** **方法 I** 分子, 分母同乘  $(1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x})$  得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \frac{1+\sqrt{x}-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{x}} dx \\ &= \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx + \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx \quad \left[ \text{令 } \sqrt{\frac{1+x}{x}} = t \right] \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int t d\left(\frac{1}{t^2-1}\right) \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t^2-1} - \int \frac{1}{t^2-1} dt \right) \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + C \\ &= \sqrt{x} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} - \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}{\sqrt{x} - \sqrt{1+x}} \right| + C.\end{aligned}$$

**方法 II** 令  $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = t$ , 则  $\frac{1}{\sqrt{1+x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{t}$ , 即  $\sqrt{1+x} -$

$\sqrt{x} = \frac{1}{t}$ , 故  $2\sqrt{x} = t - \frac{1}{t}$ ,  $x = \frac{1}{4} \left( t - \frac{1}{t} \right)^2$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{1}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right) \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} - \frac{1}{t^3} + \frac{1}{t^2}\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(t - \ln t + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t}\right) + C \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + \\
 &\quad \frac{1}{4} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x})^2 - \frac{1}{2} (\sqrt{1+x} - \sqrt{x}) + C \\
 &= \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln (\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x(1+x)} + C_1.
 \end{aligned}$$

**例 3.32** 求  $\int \frac{x e^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx$ .

**解析** 令  $u = \sqrt{e^x - 1}$ , 则

$$x = \ln(1 + u^2), \quad dx = \frac{2u}{1 + u^2} du,$$

从而

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \frac{(1 + u^2) \ln(1 + u^2)}{u} \cdot \frac{2u}{1 + u^2} du \\
 &= 2 \int \ln(1 + u^2) du = 2u \ln(1 + u^2) - \int \frac{4u^2}{1 + u^2} du \\
 &= 2u \ln(1 + u^2) - 4u + 4 \arctan u + C \\
 &= 2x \sqrt{e^x - 1} - 4 \sqrt{e^x - 1} + 4 \arctan \sqrt{e^x - 1} + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.33** 求  $\int \sqrt{3 + 2x - x^2} dx$ .

**解析** 这是无理函数的积分, 由于

$$3 + 2x - x^2 = 4 - (x - 1)^2,$$

为了消除根号, 令  $x - 1 = 2 \sin t$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int \sqrt{4 - (x-1)^2} dx = 4 \int \cos^2 t dt \\
 &= 2 \int (1 + \cos 2t) dt = 2 \left( t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + C \\
 &= 2 \arcsin \frac{x-1}{2} + \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{3+2x-x^2} + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.34** 求  $\int \frac{e^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ .

**解析** 令  $\arctan x = t$ , 则  $x = \tan t, dx = \sec^2 t dt$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int e^{2t} \cos^3 t \cdot \sec^2 t dt = \int e^{2t} \cos t dt \\
 &= \frac{1}{2} \int \cos t d(e^{2t}) = \frac{1}{2} (e^{2t} \cos t + \int e^{2t} \sin t dt) \\
 &= \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + \frac{1}{4} \int \sin t d(e^{2t}) \\
 &= \frac{1}{2} e^{2t} \cos t + \frac{1}{4} e^{2t} \sin t - \frac{1}{4} \int e^{2t} \cos t dt \\
 &= \frac{1}{4} e^{2t} (2 \cos t + \sin t) - \frac{1}{4} (\text{原式}),
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{5} e^{2t} (2 \cos t + \sin t) + C \\
 &= \frac{1}{5} e^{2\arctan x} \left( \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.35** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积,  $F(x)$  是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 试用定积分的定义和拉格朗日中值定理证明牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**解析** 用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$



将  $[a, b]$  分为  $n$  个小区间, 记  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$ ,  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i$ , 应用拉格朗日中值定理, 必存在  $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$  使得

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \Delta x_i = f(\xi_i) \Delta x_i,$$

于是

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= F(b) - F(a). \end{aligned}$$

**例 3.36** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left(x + \frac{2}{n}\right) + \left(x + \frac{4}{n}\right) + \dots + \left(x + \frac{2n}{n}\right) \right]$ .

**解析**

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(x + \frac{2i}{n}\right) \frac{2}{n},$$

考虑  $f(t) = x + t, t \in [0, 2]$ . 将  $[0, 2]$   $n$  等分, 则  $t_0 = 0, t_1 = \frac{2}{n},$

$t_2 = \frac{4}{n}, \dots, t_n = \frac{2}{n} \cdot n, \Delta t_i = \frac{2}{n}$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i) \Delta t_i = \frac{1}{2} \int_0^2 (x + t) dt \\ &= \frac{1}{4} (x + t)^2 \Big|_0^2 = \frac{1}{4} [(x + 2)^2 - x^2] \\ &= \frac{1}{4} (4x + 4) = x + 1. \end{aligned}$$

**例 3.37** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{n(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)}.$

**解析** 原式  $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n-1}{n}\right)}.$  将

$[0, 1]$   $n$  等分, 其分点为

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{n}, x_2 = \frac{2}{n}, \dots, x_{n-1} = \frac{n-1}{n}, x_n = 1,$$

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+x_i) \Delta x_i\right) = \exp\left(\int_0^1 \ln(1+x) dx\right) \\ &= \exp\left(x \ln(1+x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx\right) \\ &= \exp\left(\ln 2 - (x - \ln(1+x)) \Big|_0^1\right) \\ &= \exp(\ln 2 - 1 + \ln 2) = \frac{4}{e}. \end{aligned}$$

**例 3.38** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right]$ .

**解析** 这是夹逼准则和定积分定义的综合应用题. 一方面,

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \dots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \\ & < \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\ & = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n}, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi};$$

另一方面



$$\begin{aligned}
& \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \\
& > \frac{1}{n+1} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{n\pi}{n} \right) \\
& = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n},
\end{aligned}$$

且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{n} \right) = \int_0^1 \sin \pi x dx = \frac{2}{\pi}.$$

所以,由夹逼准则知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \frac{n\pi}{n}}{n+\frac{1}{n}} \right] = \frac{2}{\pi}.$$

**例 3.39** 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$ .

**解析** 当  $0 \leq x \leq 1$  时  $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$ , 所以

$$\int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx,$$

由于  $\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{1+n} \Big|_0^1 = \frac{1}{1+n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+n} = 0$ , 应用夹

逼准则即得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = 0$ .

**评注** 求本例中的极限,常出现下列两种错误的求法:

① 原式  $= \int_0^1 \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^2} \right) dx = \int_0^1 0 dx = 0$ . 问题出在  $0 \leq x \leq$

1 时不能推得  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ . 若将区间改变,下述计算是正确的,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0 dx = 0.$$

② 应用积分中值定理,

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \xi^n \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \xi^n \quad (0 < \xi < 1),$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{4} \xi^n = 0.$$

问题出在这里  $\xi$  不是  $(0, 1)$  中的常数. 对于不同的  $n$ , 应用积分中值定理得到的  $\xi$  一般是不同的, 应记为  $\xi_n$ , 即  $\exists \xi_n \in (0, 1)$  使得

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx = \xi_n^n \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} \xi_n^n,$$

当  $n \rightarrow \infty$  时  $\xi_n^n$  有可能成为未定式  $1^\infty$ .

**例 3.40** 证明  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$ .

**解析**  $\forall \epsilon > 0 (\epsilon < \pi)$ , 因

$$\left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \sin^n x dx \right| \leq \frac{\pi}{2} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right),$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right) = 0$ , 所以  $\exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时

$$0 < \frac{\pi}{2} \sin^n \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon}{2} \right) < \frac{\epsilon}{2}.$$

又

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\epsilon}{2},$$

故  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right| &\leq \left| \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}} \sin^n x dx \right| + \left| \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

由极限的定义即得原式成立.

**评注** 常出现的下列两种错误:

$$\textcircled{1} \text{ 原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 dx = 0.$$

$$\textcircled{2} \text{ 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \xi)^n \cdot \frac{\pi}{2} = 0.$$

**例 3.41** 设  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f(x) dx$ , 求  $f(x)$  与  $\int_0^1 f(x) dx$ .

**解析** 令  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 则

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} + A \sqrt{1-x^2},$$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + A \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &= \arctan x \Big|_0^1 + A \frac{\pi}{4} 1^2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} A, \end{aligned}$$

故  $A = \frac{\pi}{4-\pi}$ , 于是  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{\pi}{4-\pi} \sqrt{1-x^2}$ ,

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi}{4-\pi}.$$

**例 3.42** 设连续函数  $f(x)$  满足

$$f(x) = x + x^2 \int_0^1 f(x) dx + x^3 \int_0^2 f(x) dx,$$

求  $f(x)$ .

**解析** 令  $\int_0^1 f(x) dx = A$ ,  $\int_0^2 f(x) dx = B$ , 则

$$f(x) = x + Ax^2 + Bx^3.$$

于是

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x + Ax^2 + Bx^3) dx = \frac{1}{2} + \frac{A}{3} + \frac{B}{4} = A,$$

即  $8A - 3B = 6$ . 又

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 (x + Ax^2 + Bx^3) dx = 2 + \frac{8}{3}A + 4B = B,$$

即  $8A + 9B = -6$ . 两式联立可解得  $A = \frac{3}{8}, B = -1$ . 于是

$$f(x) = x + \frac{3}{8}x^2 - x^3.$$

**例 3.43** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上可微, 且满足  $f(1) = \int_0^1 xf(x) dx$ , 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}$ .

**解析** 令  $F(x) = xf(x)$ , 显然  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可微, 应用积分中值定理: 存在  $\xi_1 \in (0, 1)$ , 使得

$$F(1) = f(1) = \int_0^1 xf(x) dx = \xi_1 f(\xi_1) = F(\xi_1).$$

对  $F(x)$  在  $[\xi_1, 1]$  上应用罗尔定理可得, 存在  $\xi \in (\xi_1, 1) \subset (0, 1)$  使得

$$F'(\xi) = \xi f'(\xi) + f(\xi) = 0.$$

因  $\xi \neq 0$ , 故

$$f'(\xi) = -\frac{f(\xi)}{\xi}.$$

**例 3.44** 设  $f(x)$  是区间  $[0, +\infty)$  上单调减少且非负的连续函数,

$$x_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列  $\{x_n\}$  收敛.

**解析** 方法 I 由于  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调减少, 故有

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k) \quad (k = 1, 2, \dots),$$

因此

$$\begin{aligned}
 x_n &= \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) dx \\
 &= \sum_{k=1}^n f(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(x) dx \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} \left[ f(k) - \int_k^{k+1} f(x) dx \right] + f(n) \geq 0,
 \end{aligned}$$

即数列  $\{x_n\}$  有下界; 又

$$x_{n+1} - x_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x) dx,$$

应用积分中值定理,  $\exists \xi_n \in (n, n+1)$ , 使得

$$x_{n+1} - x_n = f(n+1) - f(\xi_n),$$

由于  $f(x)$  单调减少, 故  $x_{n+1} - x_n < 0$ , 于是数列  $\{x_n\}$  单调减少. 由单调有界准则知数列  $\{x_n\}$  收敛.

**例 3.45** 求  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{(1+x)\cos x}{1+\sin^2 x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right) dx$ .

**解析** 因为  $f_1(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$  为偶函数,  $f_2(x) = \frac{x\cos x}{1+\sin^2 x}$

为奇函数,  $f_3(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  为奇函数, 应用奇、偶函数在对称区间上定积分的性质, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_1(x) dx + 0 + 0 \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx = 2 \arctan(\sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

**例 3.46** 求  $\int_0^{\pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx \quad (n \in \mathbb{N})$ .

**解析** 因

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2nx}{x} = 2n,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2nx}{\sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2n \cos 2nx}{\cos x} = -2n,$$

所以原式为常义定积分, 不是广义积分. 令  $x = t + \frac{\pi}{2}$ , 则

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2n\left(t + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)} dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos n\pi \sin 2nt}{\cos t} dt = (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\cos x} dx, \end{aligned}$$

由于  $\frac{\sin 2nx}{\cos x}$  为奇函数, 应用奇函数在对称区间上定积分的性质, 即得上式右端为 0, 故原式 = 0.

**例 3.47** 设  $F(x) = \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt$ , 则  $F(x)$  ( ).

- (A) 为正常数 (B) 为负常数  
(C) 恒为零 (D) 不为常数

**解析** 本题首先应用周期函数定积分的性质: 若周期函数  $f(x)$  的周期为  $T$ , 可积,  $a \in \mathbf{R}$ , 则

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$$

**方法 I** 因  $f(x) = e^{\sin x} \sin x$  有周期  $2\pi$ , 连续, 所以

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{x+2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt \\ &= \int_{-\pi}^0 e^{\sin t} \sin t dt + \int_0^{\pi} e^{\sin t} \sin t dt, \end{aligned}$$

在上式右端的第一个积分中令  $t + \pi = x$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^0 e^{\sin t} \sin t dt &= \int_0^{\pi} e^{\sin(x-\pi)} \sin(x-\pi) dx \\ &= -\int_0^{\pi} e^{-\sin x} \sin x dx = -\int_0^x e^{-\sin t} \sin t dt, \end{aligned}$$



故  $F(x)$  为常数, 且

$$F(x) = \int_0^{\pi} (e^{\sin t} - e^{-\sin t}) \sin t dt > 0.$$

方法 II 应用周期函数定积分的性质与分部积分法,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{2\pi} e^{\sin t} \sin t dt = - \int_0^{2\pi} e^{\sin t} d(\cos t) \\ &= -e^{\sin t} \cos t \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot e^{\sin t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t \cdot e^{\sin t} dt > 0. \end{aligned}$$

故选(A).

**例 3.48** 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续, 且  $F(x) = \int_0^x (x-2t)f(t)dt$ , 证明:

(1) 若  $f(x)$  为偶函数, 则  $F(x)$  也是偶函数;

(2) 若  $f(x)$  单调减, 则  $F(x)$  单调增.

**解析** (1) 由于  $f(-x) = f(x)$ , 则

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} (-x-2t)f(t)dt \quad (\text{令 } t = -u) \\ &= - \int_0^x (-x+2u)f(-u)du \\ &= \int_0^x (x-2u)f(u)du = F(x), \end{aligned}$$

故  $F(x)$  也是偶函数.

(2) 由于  $f(x)$  单调减, 则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x f(t)dt + xf(x) - 2xf(x) \\ &= f(\xi)x - xf(x) \quad (0 < \xi < x \text{ 或 } x < \xi < 0) \\ &\quad (\text{积分中值定理}) \\ &= x(f(\xi) - f(x)) \geq 0, \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  单调增.

**例 3.49** 设  $f(x)$  是区间  $[-a, a]$  上连续的偶函数, 证明

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx.$$

**解析** 应用定积分的可加性,

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx, \quad (1)$$

在右端的第一个积分中, 作换元变换, 令  $x = -t$ , 则

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1+e^x} dx &= - \int_a^0 \frac{f(-t)}{1+e^{-t}} dt \\ &= \int_0^a \frac{e^t f(t)}{1+e^t} dt = \int_0^a \frac{e^x f(x)}{1+e^x} dx, \end{aligned}$$

代入(1)式得

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx &= \int_0^a \frac{e^x f(x)}{1+e^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx \\ &= \int_0^a \frac{(e^x + 1)f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x) dx. \end{aligned}$$

**例 3.50** 设函数  $S(x) = \int_0^x |\cos t| dt$ ,

(1) 当  $n$  为正整数, 且  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时, 证明  $2n \leq S(x) < 2(n+1)$ ;

(2) 求  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x}$ .

**解析** 被积函数  $|\cos t|$  是周期  $\pi$  的连续函数, 将  $[0, +\infty)$  分为小区间:

$$0 < \pi < 2\pi < 3\pi < \cdots < n\pi < (n+1)\pi < \cdots,$$

对任意正数  $x$ , 一定存在  $n, n$  为正整数或 0, 使得

$$n\pi \leq x < (n+1)\pi.$$

(1) 因为  $|\cos x| \geq 0$ , 且  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$ , 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx \leq S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx.$$

又因为  $|\cos x|$  是以  $\pi$  为周期的函数, 在长度为  $\pi$  的区间上积分值相等, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x| dx = n \int_0^{\pi} |\cos x| dx = 2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos x| dx = 2(n+1).$$

因此当  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时, 有

$$2n \leq S(x) < 2(n+1).$$

(2) 由(1)知, 当  $n\pi \leq x < (n+1)\pi$  时, 有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

当  $x \rightarrow +\infty$  时  $n \rightarrow \infty$ , 由夹逼准则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

**评注** 本例(2) 虽是  $\frac{\infty}{\infty}$  型未定式, 但不能应用洛必达法则.

**例 3.51** 设  $f(x)$  是连续函数,  $F(x)$  是  $f(x)$  的原函数, 则 ( ).

- (A) 当  $f(x)$  是奇函数时,  $F(x)$  必是偶函数
- (B) 当  $f(x)$  是偶函数时,  $F(x)$  必是奇函数
- (C) 当  $f(x)$  是周期函数时,  $F(x)$  必是周期函数
- (D) 当  $f(x)$  是单调增函数时,  $F(x)$  必是单调增函数

**解析** 因  $f(x)$  连续, 所以  $\int_0^x f(x) dx$  是  $f(x)$  的一个原函数, 则任一原函数  $F(x)$  可表示为

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx + C_0 = \int_0^x f(t) dt + C_0,$$

这里  $C_0$  为某常数, 则

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt + C_0 \stackrel{t=-u}{=} -\int_0^x f(-u) du + C_0.$$

当  $f(x)$  为奇函数时,

$$F(-x) = \int_0^x f(u) du + C_0 = F(x),$$

所以  $F(x)$  为偶函数, 即(A) 正确.

当  $f(x)$  为偶函数时,

$$F(-x) = -\int_0^x f(u) du + C_0 \neq -F(x) \quad (\text{除非 } C_0 = 0),$$

故(B) 不成立.

下面举例说明(C), (D) 不成立. 例如  $y = 1 + \cos x$  为周期  $2\pi$  的函数, 而原函数  $F(x) = x + \sin x$  非周期函数; 又如  $y = x$  为单调增函数, 而原函数  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$  非单调函数.

**例 3.52** 设  $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$ ,  $g(x) = x^3 + x^4$ , 则当  $x \rightarrow 0$  时,  $f(x)$  是  $g(x)$  的( ).

(A) 等价无穷小

(B) 同阶但非等价的无穷小

(C) 高阶无穷小

(D) 低阶无穷小

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt}{x^3 + x^4} \\ &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin(\sin^2 x)}{3x^2 + 4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3} \neq 0, \end{aligned}$$

故  $f(x)$  是  $g(x)$  的同阶但非等价的无穷小. 故选(B).

**例 3.53** 设  $f(x)$  有连续的导数,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) \neq 0$ ,  $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) dt$ , 且当  $x \rightarrow 0$  时,  $F'(x)$  与  $x^k$  是同阶无穷小, 求  $k$  的值.

**解析** 由于

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^k} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \int_0^x f(t) dt + x^2 f(x) - x^2 f(x)}{x^k} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \int_0^x f(t) dt}{x^{k-1}} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}} \\
 &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}},
 \end{aligned}$$

上式最后一式的极限  $\neq 0 \Leftrightarrow k-3=0$ , 此时

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{x^3} = f'(0) \neq 0,$$

故  $k=3$ .

**例 3.54** 求  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin(x^2)} \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^u - 1}{t} dt$ .

**解析** 原式积分中, 被积函数除含积分变量  $t$  外还含有  $x$ , 首先应通过换元变换消去  $x$ , 才能应用变上(下)限定积分的求导公式. 令  $xt = u$ , 则

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^u - 1}{t} dt &= \int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{e^u - 1}{u} du, \\
 \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\frac{1}{2}x^2}^{x^2} \frac{e^u - 1}{u} du}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - x \cdot \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - 1}{\frac{1}{2}x^2}}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - e^{\frac{1}{2}x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2} - 1}{x^2} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

**例 3.55** 设  $f(x)$  连续可微,  $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(x) = \int_0^x t f(x^2 - t^2) dt$ , 试求:

$$(1) F'(x); \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4}.$$

解析 令  $x^2 - t^2 = u$  ( $x$  为参数), 则  $-2t dt = du$ ,

$$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{1}{2} f(u) du.$$

于是

$$F'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2} f(x^2) = x f(x^2).$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^4} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{4x^2} \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x f'(x^2)}{8x} = \frac{1}{4} f'(0) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

例 3.56 确定常数  $a, b, c$  的值, 使得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} = c \quad (c \neq 0).$$

解析 由于  $x \rightarrow 0$  时,  $ax - \sin x \rightarrow 0$ , 且极限  $c$  不为零, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = \int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = 0.$$

当  $b > 0$  时, 因  $t \in (0, b)$ , 则  $\frac{\ln(1+t^3)}{t} > 0$ , 所以

$$\int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt = - \int_0^b \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt < 0,$$

当  $b < 0$  时, 因  $t \in (b, 0)$ , 则  $\frac{\ln(1+t^3)}{t} > 0$ , 所以

$$\int_b^0 \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt > 0,$$

故必有  $b = 0$ . 应用洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax - \sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t} dt} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(a - \cos x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - \cos x}{x^2} = c \quad (c \neq 0),$$

由于  $x \rightarrow 0$  时  $x^2 \rightarrow 0$ , 且极限  $c \neq 0$ , 所以  $x \rightarrow 0$  时  $a - \cos x \rightarrow 0$ , 故  $a = 1$ . 代入上式即得

$$c = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

**例 3.57** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $f(x) > 0$ , 求方程

$$\int_a^x f(t) dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)} dt = 0$$

在  $(a, b)$  内根的个数.

**解析** 令  $F(x) = \int_a^x f(t) dt - \int_x^b \frac{1}{f(t)} dt$ , 则

$$F'(x) = f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0,$$

所以  $F(x)$  在  $[a, b]$  上严格增, 因此  $F(x) = 0$  至多有一个零点. 又  $F(a) = -\int_a^b \frac{1}{f(t)} dt < 0$ ,  $F(b) = \int_a^b f(t) dt > 0$ , 应用零点定理,  $F(x)$  在  $(a, b)$  内至少有一个零点. 故  $F(x) = 0$  在  $(a, b)$  内恰有一个根.

**例 3.58** 设  $f(x)$  连续,  $\varphi(x) = \int_0^1 f(xt) dt$ , 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$  ( $A$  为常数), 求  $\varphi'(x)$  并讨论  $\varphi'(x)$  在  $x = 0$  的连续性.

**解析** 首先由条件  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A$ , 且  $f(x)$  连续, 可推出  $f(0) = 0$ , 且

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = A.$$

令  $u = xt$ , 得  $x \neq 0$  时

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x f(u) du}{x},$$

从而

$$\varphi'(x) = \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2}.$$

又  $x=0$  时  $\varphi(0)=0$ , 由导数的定义得

$$\varphi'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{A}{2}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \varphi'(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - \int_0^x f(u)du}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{x^2} \\ &= A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} = \varphi'(0), \end{aligned}$$

从而知  $\varphi'(x)$  在  $x=0$  处连续.

**例 3.59** 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}(1 - \cos x), & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{1}{x} \int_0^x \cos(t^2)dt, & x > 0, \end{cases}$$

试讨论  $f(x)$  在  $x=0$  的连续性与可导性.

**解析** 因  $f(0)=1$ ,

$$f(0-) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^2}{x^2} = 1,$$

$$f(0+) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x \cos(t^2)dt}{x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(x^2)}{1} = 1,$$

所以  $f(x)$  在  $x=0$  处连续. 因

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2(1 - \cos x) - x^2}{x^3}$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2\sin x - 2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2(\cos x - 1)}{6x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2}{6x} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\int_0^x \cos(t^2) dt - x}{x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos(x^2) - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x} = 0,
 \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  在  $x=0$  处可导, 且  $f'(0)=0$ .

**例 3.60** 设  $y = y(x)$  由方程

$$\int_0^y \exp(x^2) dx + \int_0^x \cos(x^2) dx = x^2$$

确定, 试求  $y'(x)$ .

**解析** 原式两边对  $x$  求导得

$$y' \exp(y^2) + \cos(x^2) = 2x,$$

由此解得  $y' = (2x - \cos(x^2))e^{-y^2}$ .

**例 3.61** 设  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ,

$$f(x) = \int_0^{\sin^2 x} \arcsin \sqrt{t} dt + \int_0^{\cos^2 x} \arccos \sqrt{t} dt,$$

求  $f(x)$ .

**解析** 应用变上限积分的求导公式, 先求  $f'(x)$ , 得

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (\sin^2 x)' \arcsin(\sin x) + (\cos^2 x)' \arccos(\cos x) \\
 &= x \sin 2x - x \sin 2x = 0,
 \end{aligned}$$

所以  $f(x)$  为一常数, 令  $x = \frac{\pi}{2}$  得

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^1 \arcsin \sqrt{t} dt + 0 \quad (\text{令 } \arcsin \sqrt{t} = x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d(\cos 2x) \\
 &= -\frac{1}{2} x \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx \\
 &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},
 \end{aligned}$$

故  $f(x) = \frac{\pi}{4}$ .

**例 3.62** 求连续函数  $f(x)$ , 使其满足

$$\int_0^1 f(tx) dt = f(x) + x \arctan x.$$

**解析** 令  $tx = u$ , 则  $\int_0^1 f(tx) dt = \frac{1}{x} \int_0^x f(u) du$ , 原式化为

$$\int_0^x f(u) du = xf(x) + x^2 \arctan x,$$

此式两边求导得

$$f(x) = f(x) + xf'(x) + 2x \arctan x + \frac{x^2}{1+x^2},$$

化简得

$$f'(x) = -2 \arctan x - \frac{x}{1+x^2},$$

积分得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2 \int \arctan x dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= -2x \arctan x + 2 \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= -2x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.
 \end{aligned}$$

**例 3.63** 设对任意  $x > 0$ , 曲线  $y = f(x)$  上点  $(x, f(x))$  处的切线在  $y$  轴上的截距等于

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt,$$

求  $f(x)$  的一般表达式.

**解析** 曲线  $y = f(x)$  上点  $(x, f(x))$  处的切线方程为

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x),$$

令  $X = 0$ , 得截距  $Y = f(x) - xf'(x)$ . 由题意得

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = f(x) - xf'(x), \text{ 即 } \int_0^x f(t) dt = x[f(x) - xf'(x)],$$

上式两边对  $x$  求导, 化简得

$$xf''(x) + f'(x) = 0, \text{ 即 } \frac{d}{dx}(xf'(x)) = 0,$$

积分得

$$xf'(x) = C_1,$$

因此  $f(x) = C_1 \ln x + C_2$  (其中  $C_1, C_2$  为任意常数).

**例 3.64** 试求下式的和

$$\frac{1}{2} \tan \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \tan \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tan \frac{x}{2^n}.$$

**解析** 令

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \tan \frac{x}{2^k}.$$

两边积分得

$$\begin{aligned} \int_0^x f(x) dx &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \int_0^x \tan \frac{x}{2^k} dx = - \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{x}{2^k} \\ &= - \ln \left( \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) \\ &= - \ln \left( \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \right), \end{aligned}$$

上式两边求导得

$$\text{原式} = f(x) = -\frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos \frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \cot \frac{x}{2^n} - \cot x.$$

**例 3.65** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b x f(x) dx = 0,$$

证明  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少有两个零点.

**解析** 方法 I 令

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ , 且  $F'(x) = f(x)$ , 故有

$$\begin{aligned} \int_a^b x f(x) dx &= \int_a^b x F'(x) dx = \int_a^b x dF(x) \\ &= x F(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x) dx \\ &= - \int_a^b F(x) dx = -F(\eta)(b-a) = 0. \end{aligned}$$

上式最后一步是应用积分中值定理得到, 其中  $a < \eta < b$ , 所以  $F(\eta) = 0$ . 对函数  $F(x)$  在区间  $[a, \eta]$  与  $[\eta, b]$  上分别应用罗尔定理, 必存在  $\xi_1 \in (a, \eta)$ ,  $\xi_2 \in (\eta, b)$  使得

$$F'(\xi_1) = f(\xi_1) = 0, \quad F'(\xi_2) = f(\xi_2) = 0,$$

即  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少有两个零点  $\xi_1$  与  $\xi_2$ .

**方法 II** 令

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

则  $F(a) = F(b) = 0$ ,  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 且  $F'(x) = f(x)$ , 据罗尔定理,  $\exists \xi_1 \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi_1) = f(\xi_1) = 0$ . (反证) 假设  $f(x)$  在  $(a, b)$  上只有一个零点  $x = \xi_1$ , 因  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , 可知  $f(x)$  在  $(a, \xi_1)$  与  $(\xi_1, b)$  上异号, 因而当  $x \in (a, b)$ , 且  $x \neq \xi_1$  时,

$$(x - \xi_1)f(x) > 0 \text{ (或 } < 0),$$

故

$$\int_a^b (x - \xi_1)f(x)dx > 0 \text{ (或 } < 0).$$

但另一方面

$$\int_a^b (x - \xi_1)f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx - \xi_1 \int_a^b f(x)dx = 0,$$

从而导出矛盾. 故  $f(x)$  在  $(a, b)$  上至少有两个零点.

**例 3.66** 设函数  $f(t)$  连续, 且  $f(t) > 0, f(-t) = f(t)$ . 对于函数

$$F(x) = \int_{-a}^a |x - t| f(t)dt,$$

$-a \leq x \leq a$ , 回答下列问题:

- (1) 证明  $F'(x)$  单调增加;
- (2) 求  $F(x)$  的最小值.

**解析** (1)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-a}^x (x - t)f(t)dt + \int_x^a (t - x)f(t)dt \\ &= x \int_{-a}^x f(t)dt - x \int_{-a}^x tf(t)dt + \int_x^a tf(t)dt - x \int_x^a f(t)dt, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{-a}^x f(t)dt - \int_x^a f(t)dt \\ &= \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt - \int_x^0 f(t)dt - \int_0^a f(t)dt, \end{aligned}$$

令  $t = -u$ , 则  $\int_{-a}^0 f(t)dt = -\int_a^0 f(-u)du = \int_0^a f(u)du$ , 故

$$F'(x) = 2 \int_0^x f(t)dt, \quad F''(x) = 2f(x) > 0,$$

因此  $F'(x)$  单调增加.

(2) 令  $F'(x) = 0$ , 得  $x = 0$ , 由于  $f(x) > 0$ , 所以  $x = 0$  是  $F(x)$

的惟一驻点. 又  $F''(0) = 2f(0) > 0$ , 故  $x = 0$  时,

$$F(0) = \int_{-a}^a |t| f(t) dt = 2 \int_0^a t f(t) dt$$

为最小值.

**例 3.67** 求函数  $f(x) = \int_0^{x^2} (2-t)e^{-t} dt$  的最大值和最小值.

**解析** 因为  $f(x)$  是偶函数, 故只需求  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内的最大值与最小值. 由

$$f'(x) = 2x(2-x^2)e^{-x^2} = 0,$$

得  $f(x)$  在区间  $(0, +\infty)$  内有惟一的驻点  $x = \sqrt{2}$ .

当  $0 < x < \sqrt{2}$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x > \sqrt{2}$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $x = \sqrt{2}$  是极大值点, 即最大值点. 最大值为

$$f(\sqrt{2}) = \int_0^2 (2-t)e^{-t} dt = -(2-t)e^{-t} \Big|_0^2 - \int_0^2 e^{-t} dt = 1 + e^{-2}.$$

因为

$$\int_0^{+\infty} (2-t)e^{-t} dt = -(2-t)e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 2 - 1 = 1$$

以及  $f(0) = 0$ , 故  $x = 0$  是最小值点,  $f(x)$  的最小值为 0.

**例 3.68** 证明:  $x \geq 0$  时, 函数

$$f(x) = \int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t dt$$

( $n$  为正整数) 的最大值不超过  $\frac{1}{(2n+3)(2n+2)}$ .

**解析** 方程

$$f'(x) = x(1-x)\sin^{2n}x = 0$$

在  $(0, +\infty)$  上的根为  $x = 1, k\pi (k = 1, 2, \dots)$ . 又  $f(0) = 0$ ,

$$f''(x) = (1-2x)\sin^{2n}x + x(1-x)2n\sin^{2n-1}x\cos x.$$

由于  $f''(1) = -\sin^{2n}1 < 0$ , 所以  $x = 1$  为极大值点. 由于  $f'(x)$  在  $k\pi$  的左、右邻域皆为负值, 所以  $f(x)$  在  $k\pi$  不取极值. 因此  $f(x)$  在  $[0,$

$+\infty$ ) 上有惟一的极大值点  $x=1$ , 且  $x=1$  是最大值点. 所以

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(1) = \int_0^1 (t-t^2) \sin^{2n} t \, dt \\ &\leq \int_0^1 (t-t^2) t^{2n} \, dt = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}. \end{aligned}$$

**例 3.69** 设  $f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$  试求  $F(x) =$

$\int_0^x f(t) \, dt$ , 并求  $F'(x)$  ( $0 \leq x \leq 2$ ).

**解析** 当  $0 \leq x \leq 1$  时,

$$F(x) = \int_0^x e^t \, dt = e^t \Big|_0^x = e^x - 1;$$

当  $1 < x \leq 2$  时,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^1 e^t \, dt + \int_1^x \ln t \, dt = e - 1 + x \ln x \Big|_1^x - \int_1^x dx \\ &= e - x + x \ln x. \end{aligned}$$

即

$$F(x) = \begin{cases} e^x - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ e - x + x \ln x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

由于  $f(x)$  在  $[0, 1)$  与  $(1, 2]$  上连续, 所以

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} e^x, & 0 \leq x < 1, \\ \ln x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

又由左导数、右导数的定义, 在  $x=1$  处,

$$\begin{aligned} F'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x - 1 - (e - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^x - e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e(e^{x-1} - 1)}{x - 1} = e, \\ F'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{e - x + x \ln x - (e - 1)}{x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1-x+x \ln x}{x-1} = -1 + \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln(1+(x-1))}{x-1} \\
 &= -1 + \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{x-1} = -1 + 1 = 0,
 \end{aligned}$$

所以  $F(x)$  在  $x=1$  处不可导.

**例 3.70** 设  $f(x) = x, x \geq 0$ ;

$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

求积分  $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$  ( $x \geq 0$ ) 的表达式.

**解析** 令  $x-t = u$  ( $x$  为参数), 则

$$\text{原式} = - \int_x^0 f(x-u)g(u)du = \int_0^x f(x-u)g(u)du.$$

当  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  时, 因  $0 \leq u \leq x$  故  $x-u \geq 0, u \leq \frac{\pi}{2}$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^x (x-u) \sin u du = -x \cos u \Big|_0^x + (u \cos u - \sin u) \Big|_0^x \\
 &= x - \sin x.
 \end{aligned}$$

当  $x > \frac{\pi}{2}$  时,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-u)g(u)du + \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(x-u)g(u)du \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x-u) \sin u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^x (x-u) 0 du \\
 &= -x \cos u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (u \cos u - \sin u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = x - 1.
 \end{aligned}$$

所以



$$\text{原式} = \begin{cases} x - \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

**例 3.71** 设  $a < b$ ,  $a, b$  为常数, 求  $\int_a^b x |x| dx$ .

**解析** 当  $a < b \leq 0$  时,

$$\text{原式} = -\int_a^b x^2 dx = -\frac{1}{3}(a^3 - b^3);$$

当  $a < 0 < b$  时,

$$\text{原式} = -\int_a^0 x^2 dx + \int_0^b x^2 dx = \frac{1}{3}(a^3 + b^3);$$

当  $0 \leq a < b$  时,

$$\text{原式} = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

**例 3.72** 求  $\int_0^\pi \sqrt{1 - \sin x} dx$ .

$$\begin{aligned} \text{解析} \quad \text{原式} &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx \\ &= \int_0^\pi \left| \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) dx \\ &= 2 \left( \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2 \left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^0 \\ &= 4(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

**例 3.73** 设  $f(2) = 1, f'(2) = 0, \int_0^2 f(x) dx = 1$ , 求  $\int_0^1 x^2 f''(2x) dx$ .

$$\text{解析} \quad \int_0^1 x^2 f''(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 df'(2x)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} x^2 f'(2x) \Big|_0^1 - \int_0^1 x f'(2x) dx \\
 &= - \int_0^1 x f'(2x) dx = - \frac{1}{2} \int_0^1 x df(2x) \\
 &= - \frac{1}{2} x f(2x) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 f(2x) dx \\
 &= - \frac{1}{2} f(2) + \frac{1}{4} \int_0^2 f(t) dt \quad (2x = t) \\
 &= - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = - \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

**例 3.74** 如图 3.1, 曲线  $C$  的方程为  $y = f(x)$ , 曲线  $C$  在点  $(0,0)$  与  $(3,2)$  处的切线分别为  $l_1$  与  $l_2$ ,  $l_1$  与  $l_2$  相交于  $(2,4)$ , 点  $(3,2)$  是曲线  $C$  的拐点, 函数  $f(x)$  三阶连续可导, 计算定积分  $\int_0^3 (x^2 + x) f'''(x) dx$ .

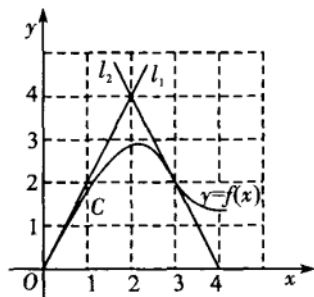


图 3.1

**解析** 由于点  $(3,2)$  为拐点, 且  $f(x)$  在  $x=3$  处二阶可导, 所以  $f''(3)=0$ . 由于

直线  $l_1$  通过点  $(0,0)$  和  $(2,4)$ , 所以直线  $l_1$  的斜率为  $\frac{4}{2} = 2$ , 于是  $f'(0) = 2$ . 由于直线  $l_2$  通过点  $(2,4)$  和  $(3,2)$ , 所以直线  $l_2$  的斜率为  $\frac{-2}{1} = -2$ , 于是  $f'(3) = -2$ . 又由图可知  $f(0) = 0, f(3) = 2$ . 应用分部积分法,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^3 (x^2 + x) df''(x) \\
 &= (x^2 + x) f''(x) \Big|_0^3 - \int_0^3 f''(x) (2x + 1) dx \\
 &= 0 - \int_0^3 (2x + 1) df'(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(2x+1)f'(x) \Big|_0^3 + 2 \int_0^3 f'(x) dx \\
 &= -7f'(3) + f'(0) + 2f(x) \Big|_0^3 \\
 &= 14 + 2 + 2(f(3) - f(0)) = 20.
 \end{aligned}$$

**例 3.75** 求  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$ .

**解析** 原式  $= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sec^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x d(\tan x)$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} x \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\
 &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2} \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \ln 2.
 \end{aligned}$$

**例 3.76** 求  $\int_1^e \sin(\ln x) dx$ .

**解析** 令  $\ln x = t$ , 则  $x = e^t$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^1 e^t \sin t dt = \int_0^1 \sin t d(e^t) = e^t \sin t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \cos t dt \\
 &= e \sin 1 - \int_0^1 \cos t d(e^t) = e \sin 1 - e^t \cos t \Big|_0^1 - \int_0^1 e^t \sin t dt \\
 &= e(\sin 1 - \cos 1) + 1 - (\text{原式}),
 \end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = \frac{1}{2} e(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$$

**例 3.77** 设  $f(x)$  在  $[-a, a]$  上连续 ( $a > 0$ ), 求证

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx,$$

并求  $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin x} dx$ .

**解析** 因为

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x) + f(x) - f(-x)],$$

而  $\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$  为偶函数,  $\frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$  为奇函数, 所以

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x) dx &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) + f(-x)] dx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a [f(x) - f(-x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx + 0 \\ &= \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx.\end{aligned}$$

由此公式即得

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \sin x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{1}{1 + \sin x} + \frac{1}{1 - \sin x} \right) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = 2 \tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2.\end{aligned}$$

**例 3.78** 设  $f(x), g(x)$  在  $[-a, a]$  上连续,  $g(x)$  为偶函数,  $f(x) + f(-x) = A$  ( $A$  为常数),

(1) 求证  $\int_{-a}^a f(x)g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx;$

(2) 求  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx.$

**解析** (1)

$$\begin{aligned}\int_{-a}^a f(x)g(x)dx &= \int_{-a}^0 f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx \\ &\stackrel{x=-t}{=} \int_0^a f(-t)g(-t)dt + \int_0^a f(x)g(x)dx \\ &= \int_0^a [f(-x) + f(x)]g(x)dx = A \int_0^a g(x)dx;\end{aligned}$$

(2) 显见  $|\sin x|$  为偶函数. 令  $f(x) = \arctan e^x$ , 则  $f(-x) = \arctan e^{-x}$ , 由于

$$\begin{aligned}(f(x) + f(-x))' &= (\arctan e^x + \arctan e^{-x})' \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{1+e^{2x}} = 0,\end{aligned}$$

而  $f(0) + f(-0) = \frac{\pi}{2}$ , 所以  $f(x) + f(-x) = \frac{\pi}{2}$ , 应用(1)的结果得

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx \\ &= \frac{\pi}{2} (-\cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**例 3.79** 求  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$ .

**解析** 应用分部积分公式,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^1 \ln(1+x) d\left(\frac{1}{2-x}\right) \\ &= \frac{\ln(1+x)}{2-x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{(2-x)(1+x)} dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \int_0^1 \left(\frac{1}{2-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \ln \left| \frac{1+x}{2-x} \right| \Big|_0^1 \\ &= \ln 2 - \frac{1}{3} \left( \ln 2 - \ln \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3} \ln 2.\end{aligned}$$

**例 3.80** 求  $\int_1^3 \frac{1}{x \sqrt{x^2+5x+1}} dx$ .

**解析** 令  $x = \frac{1}{t}$ , 则

$$\text{原式} = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{1+5t+t^2}} dt = \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{1}{\sqrt{\left(t+\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}}} dt,$$

记  $t + \frac{5}{2} = u$ ,  $\frac{\sqrt{21}}{2} = a$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{\frac{17}{6}}^{\frac{7}{2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 - a^2}} du = \ln |u + \sqrt{u^2 - a^2}| \Big|_{\frac{17}{6}}^{\frac{7}{2}} \\
 &= \ln \left| \frac{\frac{7}{2} + \sqrt{7}}{\frac{17}{6} + \frac{5}{3}} \right| = \ln \frac{7 + 2\sqrt{7}}{9}.
 \end{aligned}$$

**例 3.81** 求  $\int_0^1 \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} dx$ .

**解析** 令  $x = \sin t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt \quad \left( \text{令 } t = \frac{\pi}{2} - u \right) \\
 &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin u}{\cos u + \sin u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt,
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{2} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

**例 3.82** 求  $\int_{-1}^0 x^4 \cdot \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$ .

**解析** 令  $x = \cos t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \cdot \cot \frac{t}{2} \cdot \sin t dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t (1 + \cos t) dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^4 t dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^5 t dt \\
 &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2t + \frac{1}{8} \cos 4t \right) dt + \\
 &\quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 - 2\sin^2 t + \sin^4 t) d(\sin t)
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + \sin t - \frac{2}{3}\sin^3 t + \frac{1}{5}\sin^5 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
 &= \frac{3}{16}\pi - \frac{8}{15}.
 \end{aligned}$$

**例 3.83** 求  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$ .

**解析** 方法 I 采用分部积分法

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\ln 2} e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} dx = -e^{-x} \sqrt{e^{2x}-1} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \\
 &= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) \Big|_0^{\ln 2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).
 \end{aligned}$$

**方法 II** 采用换元积分法, 令  $e^{-x} = \sin t$ , 则  $dx = \frac{-\cos t}{\sin t} dt$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt \\
 &= \ln(\csc t - \cot t) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 &= \ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

**方法 III** 令  $\sqrt{1-e^{-2x}} = t$ , 则  $x = -\frac{1}{2}\ln(1-t^2)$ ,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t \frac{t}{1-t^2} dt = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1+t^2+1}{1-t^2} dt \\
 &= \left( -t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \ln \left| \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right|.
 \end{aligned}$$

**例 3.84** 求  $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1+x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$ .

**解析** 原式  $= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{x - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x^2}} d(e^{x+\frac{1}{x}}) \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 x d(e^{x+\frac{1}{x}}) \\
 &= \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx + x e^{x+\frac{1}{x}} \Big|_{\frac{1}{2}}^2 - \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{x+\frac{1}{x}} dx = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}.
 \end{aligned}$$

**例 3.85** 求  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x) dx$ .

**解析** 原式  $= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin x + \cos x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx \\
 &= \frac{1}{4} \pi \ln \sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx \\
 &\quad \left(\text{令 } \frac{\pi}{4} - x = t\right) \\
 &= \frac{1}{8} \pi \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos x dx = \frac{1}{8} \pi \ln 2.
 \end{aligned}$$

**例 3.86** 求  $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$ .

**解析** 方法 I 应用分部积分法,

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^1 \ln(1+x) d(\arctan x) \\
 &= \ln(1+x) \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \ln 2 - I,
 \end{aligned}$$

其中  $I = \int_0^1 \frac{\arctan x}{1+x} dx$ , 令  $\arctan x = t$ , 则



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{(\sin t + \cos t) \cos t} dt \quad \left( \text{令 } t = \frac{\pi}{4} - u \right) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - u}{(\sin u + \cos u) \cos u} du \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \tan u} d(\tan u) - I \\
 &= \frac{\pi}{4} \ln |1 + \tan u| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I = \frac{\pi}{4} \ln 2 - I.
 \end{aligned}$$

所以  $I = \frac{\pi}{8} \ln 2$ ,

$$\text{原式} = \frac{\pi}{8} \ln 2.$$

**方法 II** 令  $x = \tan t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln(1 + \tan t)}{\sec^2 t} \sec^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( 1 + \frac{\sin t}{\cos t} \right) dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left[ \frac{\sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + t \right)}{\cos t} \right] dt \quad (\text{参见例 3.85}) \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \sqrt{2} dt + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \left( \sin \left( \frac{\pi}{4} + t \right) \right) dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \\
 &\quad \left( t = \frac{\pi}{4} - u \right) \\
 &= \frac{\pi}{8} \ln 2 - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \ln \sin \left( \frac{\pi}{2} - u \right) du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt \\
 &= \frac{\pi}{8} \ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos u du - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln \cos t dt = \frac{\pi}{8} \ln 2.
 \end{aligned}$$

**例 3.87** 设  $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$ , 求  $\int_0^\pi f(x) dx$ .

**解析** **方法 I** 应用分部积分法,

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= x f(x) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x f'(x) dx \\
 &= \pi f(\pi) - \int_0^{\pi} \frac{x}{\pi-x} \sin x dx \\
 &= \pi f(\pi) + \int_0^{\pi} \frac{\pi-x-\pi}{\pi-x} \sin x dx \\
 &= \pi f(\pi) + \int_0^{\pi} \sin x dx - \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{\pi-x} dx \\
 &= \pi f(\pi) - \cos x \Big|_0^{\pi} - \pi f(\pi) = 2.
 \end{aligned}$$

**评注** 由于  $\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt$  的原函数难于求出(可以证明其原函数不能用初等函数表示),故不能从求  $f(x)$  入手解题.

**方法 II** 应用二次积分交换次序(参见 7.1,7)得

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi} f(x) dx &= \int_0^{\pi} dx \int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt = \int_0^{\pi} dt \int_t^{\pi} \frac{\sin t}{\pi-t} dx \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{\pi-t} (\pi-t) dx = \int_0^{\pi} \sin t dt = 2.
 \end{aligned}$$



## 4

## 定积分的应用与广义积分

## 4.1 基本概念与内容提要

## 1) \* 平面图形的面积

(1) 若  $D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ ,  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$  连续, 则  $D$  的面积为

$$S(D) = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] dx.$$

(2) 若  $D = \{(x, y) \mid \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$ ,  $\psi_1(y)$ ,  $\psi_2(y)$  连续, 则  $D$  的面积为

$$S(D) = \int_c^d [\psi_2(y) - \psi_1(y)] dy.$$

(3) 若  $D = \{(\rho, \theta) \mid \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ ,  $\rho_1(\theta)$ ,  $\rho_2(\theta)$  连续, 则  $D$  的面积为

$$S(D) = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta [\rho_2^2(\theta) - \rho_1^2(\theta)] d\theta.$$

这里  $(\rho, \theta)$  为极坐标.

## 2) \* 特殊立体的体积

(1) 设立体  $\Omega$  介于平面  $x = a$  与  $x = b$  之间,  $\forall x \in (a, b)$ , 过点  $x$  且与  $x$  轴垂直的平面截立体  $\Omega$  的截面面积为连续函数  $A(x)$ , 则立体  $\Omega$  的体积为

$$V(\Omega) = \int_a^b A(x) dx.$$

(2) 曲线  $y = f(x)$  与  $x = a, x = b, y = 0$  ( $f(x)$  连续) 所围的平面区域绕  $x$  轴或  $y$  轴旋转一周所得旋转体的体积分别为

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx \quad (0 \leq a < b).$$

### 3) \* 平面曲线的弧长

(1) 曲线  $\Gamma$  的方程为  $y = f(x), a \leq x \leq b, f(x)$  连续可导, 则曲线  $\Gamma$  的弧长为

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(2) 曲线  $\Gamma$  的参数方程为  $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta, \varphi(t), \psi(t)$  连续可导, 则曲线  $\Gamma$  的弧长为

$$l = \int_a^\beta \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

(3) 曲线  $\Gamma$  的极坐标方程为  $\rho = \rho(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta, \rho(\theta)$  连续可导, 则曲线  $\Gamma$  的弧长为

$$l = \int_a^\beta \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

### 4) 旋转面的面积

平面曲线  $y = f(x) (a \leq x \leq b)$  绕  $x$  轴旋转一周的旋转面面积为

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

### 5) 定积分在物理上的应用

应用定积分解决变力做功、压力、引力等物理问题.

### 6) 定积分在经济上的应用

### 7) 应用定积分证明有关的等式与不等式

### 8) 两类广义积分的概念

若  $f(x)$  在任意有限区间  $[a, x]$  上可积,



$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(x) dx,$$

若上式右端的极限存在且为有限数, 称广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛; 否则称为发散. 若  $f(x)$  在  $x = b$  的左邻域内无界, 则

$$\int_a^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow b-} \int_a^x f(x) dx,$$

若上式右端的极限存在且为有限数, 称广义积分  $\int_a^b f(x) dx$  收敛, 否则称为发散.

对于下限  $x = a$  为奇点的情况, 有与上述  $x = b$  为奇点的情况类似的收敛与发散的概念.

例如, 广义积分  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$  当且仅当  $p > 1$  时收敛; 广义积分  $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p} dx$  当且仅当  $p < 1$  时收敛; 广义积分  $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p} dx$  当且仅当  $p < 1$  时收敛.

### 9) 两类广义积分的计算

#### (1) \* 广义牛顿-莱布尼兹公式.

若  $x = +\infty$  是  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  的惟一奇点, 且  $F'(x) = f(x), x \in [a, +\infty)$ , 则

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

这里  $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ .

若  $x = b$  是  $\int_a^b f(x) dx$  的惟一奇点, 且  $F'(x) = f(x), x \in [a, b)$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^{b-} = F(b-) - F(a).$$

若  $x=a$  是  $\int_a^b f(x)dx$  的惟一奇点, 且  $F'(x)=f(x), x \in (a, b]$ ,

则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_{a+}^b = F(b) - F(a+).$$

(2) \* 广义换元积分公式 若  $x=b$  (或  $+\infty$ ) 是广义积分  $\int_a^b f(x)dx$  的惟一奇点, 令  $x=\varphi(t), \varphi(t)$  连续可导, 且  $a=\varphi(\alpha), \lim_{t \rightarrow \beta} \varphi(t) = b$  (或  $+\infty$ ), 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

(3) \* 广义分部积分公式 设  $x=b$  (或  $+\infty$ ) 是广义积分  $\int_a^b u(x)dv(x)$  的惟一奇点, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)dv(x) &= u(x)v(x) \Big|_a^{b-} - \int_a^b v(x)du(x), \\ \int_a^{+\infty} u(x)dv(x) &= u(x)v(x) \Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} v(x)du(x). \end{aligned}$$

### 10) 两类广义积分敛散性判别①

(1) 设  $x=b$  (或  $+\infty$ ) 是广义积分  $\int_a^{b(+\infty)} f(x)dx$  的惟一奇点, 且

$$0 < f(x) \leq g(x), x \in [a, b) \text{ 或 } [a, +\infty),$$

则当  $\int_a^{b(+\infty)} g(x)dx$  收敛时,  $\int_a^{b(+\infty)} f(x)dx$  也收敛; 当  $\int_a^{b(+\infty)} f(x)dx$  发散时,  $\int_a^{b(+\infty)} g(x)dx$  也发散.

(2) 设  $x=+\infty$  是广义积分  $\int_a^{+\infty} f(x)dx$  的惟一奇点,  $f(x) > 0$ ,

① 这里 10), 11) 两点对考研不作要求.

若

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p f(x) = \lambda,$$

则当  $p > 1, \lambda < +\infty$  时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  收敛; 当  $p \leq 1, \lambda > 0$  时,  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  发散.

(3) 设  $x = b$  是广义积分  $\int_a^b f(x) dx$  的惟一奇点,  $f(x) > 0$ , 若

$$\lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^p f(x) = \lambda,$$

则当  $p < 1, \lambda < +\infty$  时,  $\int_a^b f(x) dx$  收敛; 当  $p \geq 1, \lambda > 0$  时,  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

(4) 设  $x = a$  是广义积分  $\int_a^b f(x) dx$  的惟一奇点,  $f(x) > 0$ , 若

$$\lim_{x \rightarrow a+0} (x-a)^p f(x) = \lambda,$$

则当  $p < 1, \lambda < +\infty$  时,  $\int_a^b f(x) dx$  收敛; 当  $p \geq 1, \lambda > 0$  时,  $\int_a^b f(x) dx$  发散.

### 11) $\Gamma$ 函数与 B 函数

$$(1) \quad \Gamma(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \quad (x > 0),$$

$$B(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (x > 0, y > 0).$$

(2) 关于  $\Gamma$  函数和 B 函数有下列性质和常用公式:

$$1^\circ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0);$$

$$2^\circ B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad (x > 0, y > 0);$$

$$3^\circ B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2x-1} t \cos^{2y-1} t dt \quad (x > 0, y > 0).$$

$$4^\circ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi};$$

$$5^\circ B(x, 1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (0 < x < 1).$$

## 4.2 典型习题与试题解析

**例 4.1** 求曲线  $y = x(1-x^2)$  与  $x$  轴所围平面图形的面积.

**解析** 曲线  $y = x(1-x^2)$  与  $x$  轴的交点为  $x = 0, x = -1, x = 1$ , 且当  $x \in (-1, 0)$  时  $y < 0$ ; 当  $x \in (0, 1)$  时  $y > 0$ , 所以所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 -y dx + \int_0^1 y dx = -\int_{-1}^0 x(1-x^2) dx + \int_0^1 x(1-x^2) dx \\ &= \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \right) \Big|_{-1}^0 + \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**评注** 一种错误的求法是

$$S = \int_{-1}^1 x(1-x^2) dx = 0,$$

因为  $\int_{-1}^1 x(1-x^2) dx$  是表示  $y = x(1-x^2)$  与  $x$  轴所围平面图形的面积的代数和.

**例 4.2** 求曲线  $y = x^3 - 6x$  与  $y = x^2$  所围图形的面积.

**解析** 由  $\begin{cases} y = x^3 - 6x, \\ y = x^2, \end{cases}$  解得  $x = -2, 0, 3$ , 故两曲线的交点为  $(-2, 4), (0, 0), (3, 9)$ , 如图 4.1. 在  $(-2, 0)$  上  $x^3 - 6x > x^2$ ; 在

$(0, 3)$  上  $x^2 > x^3 - 6x$ . 故所求面积为

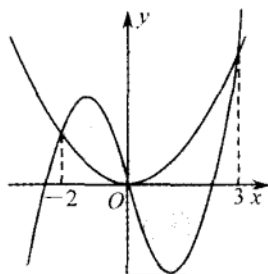


图 4.1

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (x^3 - 6x - x^2) dx + \int_0^3 (x^2 - x^3 + 6x) dx \\ &= \left( \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right) \Big|_{-2}^0 + \left( \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 \right) \Big|_0^3 \end{aligned}$$



$$= \frac{253}{12}.$$

**例 4.3** 求曲线  $y = \ln x$  的一条切线, 使得该切线, 原曲线, 以及直线  $x = 1, x = e^2$  所围图形的面积最小.

**解析** 曲线  $y = \ln x$  上点  $(a, \ln a)$  处的切线方程为

$$y = \ln a + \frac{1}{a}(x - a),$$

由曲线  $y = \ln x$ , 上述切线以及  $x = 1, x = e^2$  所围图形的面积为

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_1^{e^2} \left[ \ln a + \frac{1}{a}(x - a) - \ln x \right] dx \\ &= \ln a \cdot (e^2 - 1) + \frac{1}{a} \left( \frac{1}{2}x^2 - ax \right) \Big|_1^{e^2} + x(1 - \ln x) \Big|_1^{e^2} \\ &= (e^2 - 1) \left( \ln a + \frac{e^2 + 1}{2a} - 1 \right) - e^2 - 1. \end{aligned}$$

求  $S(a)$  的导数得

$$S'(a) = (e^2 - 1) \left( \frac{1}{a} - \frac{1 + e^2}{2a^2} \right),$$

由  $S'(a) = 0$  得惟一驻点  $a_0 = \frac{1}{2}(1 + e^2)$ , 由于

$$S''(a_0) = (e^2 - 1) \left( -\frac{1}{a_0^2} + \frac{1 + e^2}{a_0^3} \right) = 4 \frac{e^2 - 1}{(1 + e^2)^2} > 0,$$

所以  $S(a)$  在  $a = a_0$  处取极小值, 即最小值. 于是所求切线方程为

$$y - \ln a_0 = \frac{1}{a_0}(x - a_0),$$

即

$$y - \ln \frac{1 + e^2}{2} = \frac{2}{1 + e^2}x - 1.$$

**例 4.4** 已知抛物线  $y = px^2 + qx$  (其中  $p < 0, q > 0$ ) 在第一象限内与直线  $x + y = 5$  相切, 设此抛物线与  $x$  轴所围成的平面图形的面积为  $S$ ,

(1) 问  $p$  和  $q$  为何值时,  $S$  达最大值?

(2) 求出  $S$  的最大值.

**解析** 抛物线与  $x$  轴交于原点与  $(-\frac{q}{p}, 0)$  (图 4.2), 由于直线  $x+y=5$  的斜率是  $-1$ , 令

$$y' = 2px + q = -1,$$

得  $x = \frac{-1-q}{2p}$ , 代入  $5-x = px^2 + qx$  可解得

$$p = -\frac{1}{20}(1+q)^2. \quad (1)$$

再应用定积分求面积  $S$ ,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx) dx \\ &= \left( \frac{1}{3} px^3 + \frac{1}{2} qx^2 \right) \Big|_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$S(q) = \frac{200q^3}{3(1+q)^4},$$

令

$$S'(q) = \frac{200q^3(3-q)}{3(1+q)^5} = 0,$$

得惟一驻点  $q=3$ . 由于  $0 < q < 3$  时  $S'(q) > 0$ ;  $q > 3$  时  $S'(q) < 0$ ,

所以  $q=3$  时  $S$  取极大值, 即  $p = -\frac{4}{5}$ ,  $q=3$  时  $S$  取最大值, 最大值

为  $S = \frac{225}{32}$ .

**例 4.5** 该抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  满足下列两个条件:

(1) 通过  $(0,0)$  和  $(1,2)$  两点, 且  $a < 0$ ;

(2) 与抛物线  $y = -x^2 + 2x$  围成的图形面积最小.

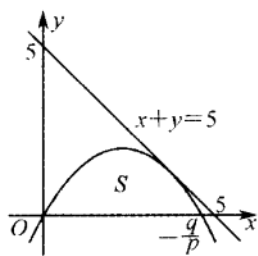


图 4.2

试求  $a, b, c$  的值.

**解析** 因抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  过  $(0, 0), (1, 2)$  两点, 故  $c = 0, a + b = 2$ , 由于  $a < 0$ , 知此抛物线开口向下; 又抛物线  $y = -x^2 + 2x$ , 通过点  $(0, 0), (2, 0)$ , 开口向下, 顶点为  $(1, 1)$ , 因此抛物线  $y = ax^2 + bx$  在抛物线  $y = -x^2 + 2x (0 \leq x \leq 1)$  的上方 (如图 4.3). 设两抛物线的另一交点为  $A$ ,

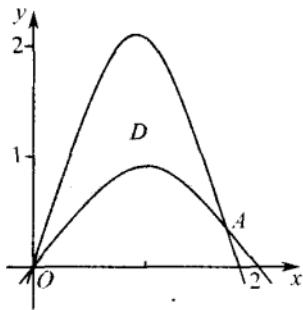


图 4.3

则  $A$  的横坐标为  $\frac{a}{1+a}$ , 因此两抛物线所围

图形的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{a}{1+a}} [ax^2 + (2-a)x + x^2 - 2x] dx \\ &= \int_0^{\frac{a}{1+a}} [(a+1)x^2 - ax] dx = -\frac{a^3}{6(1+a)^2}, \end{aligned}$$

令  $\frac{dS}{da} = -\frac{a^2(3+a)}{6(1+a)^3} = 0$ , 可解得  $a = -3$  ( $a = 0$  不合题意), 且  $a <$

$-3$  时,  $\frac{dS}{da} < 0$ ;  $-3 < a < -1$  时,  $\frac{dS}{da} > 0$ , 所以  $a = -3$  (此时  $b = 5$ )

是极小值点. 由于  $a \in (-\infty, 0)$  时, 驻点  $a = -3$  是惟一的, 故  $a = -3, b = 5, c = 0$  为所求之值.

**例 4.6** 设  $y = f(x)$  是区间  $[0, 1]$  上的任一非负连续函数.

(1) 试证存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得在区间  $[0, x_0]$  上以  $f(x_0)$  为高的矩形面积, 等于在区间  $[x_0, 1]$  上以  $y = f(x)$  为曲边的曲边梯形面积.

(2) 又设  $f(x)$  在区间  $(0, 1)$  内可导, 且  $f'(x) > -\frac{2f(x)}{x}$ , 证明

(1) 中的  $x_0$  是惟一的.

**解析** (1) 由题意, 欲证存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得

$$x_0 f(x_0) = \int_{x_0}^1 f(x) dx.$$

作辅助函数  $F(x)$ , 使得

$$F'(x) = xf(x) - \int_x^1 f(t) dt,$$

为求出  $F(x)$ , 令  $-\int_x^1 f(t) dt = \varphi(x)$ , 则  $f(x) = \varphi'(x)$ , 于是

$$\begin{aligned} F(x) &= \int xf(x) dx + \int \varphi(x) dx \\ &= \int x d\varphi(x) + \int \varphi(x) dx \\ &= x\varphi(x) + C \quad (\text{取 } C = 0) \\ &= -x \int_x^1 f(t) dt. \end{aligned}$$

由于  $F(0) = F(1) = 0$ , 且  $F(x)$  在  $[0, 1]$  上可导, 应用罗尔定理知, 存在  $x_0 \in (0, 1)$ , 使得  $F'(x_0) = 0$ , 即原题中(1)成立.

(2) 欲证上述  $x_0$  是惟一的, 我们来证明  $F'(x)$  在  $[0, 1]$  上严格单调. 由于

$$\begin{aligned} (F'(x))' &= F''(x) = f(x) + xf'(x) + f(x) \\ &= 2f(x) + xf'(x) > 0, \end{aligned}$$

所以  $F'(x)$  在  $[0, 1]$  上严格增加, 故上述(1)中  $F'(x)$  的零点  $x_0$  是惟一的.

**例 4.7** 求极坐标方程  $\rho = \cos 3\theta$  所围平面图形的面积.

**解析** 画出曲线  $\rho = \cos 3\theta$  的图形如图 4.4, 此为三叶玫瑰线. 其第一象限的部分界于  $\theta = 0$  与  $\theta = \frac{\pi}{6}$  之间, 所以所求图形的面积为

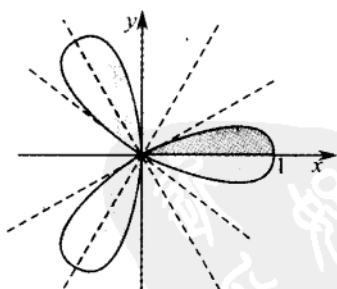


图 4.4

$$\begin{aligned}
 S &= 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \rho^2 d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 3\theta d\theta \\
 &= \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos 6\theta) d\theta \\
 &= \frac{3}{2} \left( \theta + \frac{1}{6} \sin 6\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

**例 4.8** 求心形线  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  的全长, 其中  $a > 0$  是常数.

**解析** 心形线  $\rho = a(1 + \cos \theta)$  是一条关于  $x$  轴对称的曲线, 当  $\theta$  从 0 增至  $\pi$  时, 对应于曲线的上半半. 由于

$$\rho'(\theta) = -a \sin \theta,$$

$$\begin{aligned}
 dl &= \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2} d\theta = a \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta \\
 &= 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta,
 \end{aligned}$$

利用对称性知, 所求心形线的全长为

$$l = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8a \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8a.$$

**例 4.9** 在曲线  $y = x^2 (x \geq 0)$  上某点处作切线, 使该切线、原曲线与  $x$  轴所围图形的面积为  $\frac{1}{12}$ , 求切点坐标、切线方程, 并求此图形绕  $x$  轴旋转一周的立体体积.

**解析** 设切点的横坐标为  $x = a$ , 则切线方程为

$$y - a^2 = 2a(x - a) \quad (a > 0),$$

由题意可得

$$S = \int_0^{a^2} \left( \frac{y+a^2}{2a} - \sqrt{y} \right) dy = \frac{1}{12},$$

化简可得  $\frac{1}{12}a^3 = \frac{1}{12}$ , 于是  $a = 1$ , 因此所求切点坐标为  $(1, 1)$ , 切线方程为  $y = 2x - 1$ . 且

$$V = \int_0^1 \pi x^4 dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \pi (2x - 1)^2 dx$$

$$= \frac{\pi}{5} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{30}.$$

**例 4.10** 设平面图形  $A$  由  $x^2 + y^2 \leq 2x$  与  $y \geq x$  所确定, 求图形  $A$  绕直线  $x = 2$  旋转一周所得旋转体的体积.

**解析**  $A$  的图形如图 4.5 所示.

取  $y$  为积分变量, 它的变化区间为  $[0, 1]$ , 易见  $A$  的两条边界曲线方程分别为

$$x = 1 - \sqrt{1 - y^2} \text{ 与 } x = y \quad (0 \leq y \leq 1),$$

于是所求体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \{ \pi [2 - (1 - \sqrt{1 - y^2})]^2 - \pi (2 - y)^2 \} dy \\ &= \int_0^1 2\pi [\sqrt{1 - y^2} - (1 - y)^2] dy \quad (\text{第一项中令 } y = \sin t) \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt + \frac{(1 - y)^3}{3} \Big|_0^1 \\ &= 2\pi \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

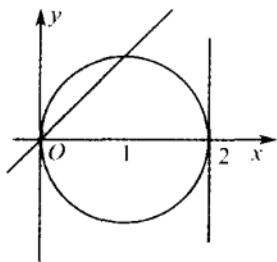


图 4.5

**评注** 在上式中定积分  $\int_0^1 \sqrt{1 - y^2} dx$  可直接由几何意义知其等于  $\frac{1}{4}\pi 1^2 = \frac{\pi}{4}$ .

**例 4.11** 图形  $D$  由  $y = kx$  ( $0 < k < 1$ ),  $y = x^2$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$  所围成, 求  $k$  为何值时,  $D$  的面积最小; 当  $D$  的面积最小时, 求  $D$  绕  $x$  轴旋转一周的旋转体体积.

**解析**  $y = kx$  与  $y = x^2$  的交点为  $(k, k^2)$ , 所以  $D$  的面积为

$$S = \int_0^k (kx - x^2) dx + \int_k^1 (x^2 - kx) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{1}{2} kx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^k + \left( \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} kx^2 \right) \Big|_k^1 \\
 &= \frac{1}{6} k^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} k + \frac{1}{6} k^3 = \frac{1}{3} k^3 - \frac{1}{2} k + \frac{1}{3},
 \end{aligned}$$

由  $S' = k^2 - \frac{1}{2} = 0$  解得惟一驻点  $k_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , 又  $S''(k_0) = \sqrt{2} > 0$ , 所

以当  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 图形  $D$  的面积取极小值, 即最小值.

当  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$  时, 图形  $D$  绕  $x$  轴旋转的体积为

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left[ \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2 - x^4 \right] dx + \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left[ x^4 - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} x \right)^2 \right] dx \\
 &= \pi \left( \frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right) \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \pi \left( \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^3 \right) \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \\
 &= \frac{1}{30} (1 + \sqrt{2}) \pi.
 \end{aligned}$$

**例 4.12** 设  $y = ax^2 + bx + c$  过原点, 当  $0 \leq x \leq 1$  时  $y \geq 0$ , 又与  $x$  轴及  $x = 1$  所围图形的面积为  $\frac{1}{3}$ , 试确定  $a, b, c$ , 使此图形绕  $x$  轴旋转一周的立体体积最小.

**解析** 曲线过点  $(0, 0)$ , 由此得  $c = 0$ . 由

$$\int_0^1 (ax^2 + bx) dx = \frac{1}{3} a + \frac{1}{2} b = \frac{1}{3},$$

化简得  $2a + 3b = 2$ , 又旋转体的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^1 (ax^2 + bx)^2 dx = \pi \left( \frac{1}{5} a^2 + \frac{1}{2} ab + \frac{1}{3} b^2 \right) \\
 &= \pi \left( \frac{4}{27} + \frac{1}{27} a + \frac{2}{135} a^2 \right).
 \end{aligned}$$

由  $\frac{dV}{da} = \pi \left( \frac{1}{27} + \frac{4}{135} a \right) = 0$  得惟一驻点  $a_0 = -\frac{5}{4}$ , 因  $V''(-\frac{5}{4}) =$

$\frac{4}{135}\pi > 0$ , 所以旋转体体积在  $a_0$  处取极小值, 即最小值, 且  $b_0 =$

$\frac{2}{3}(1-a_0) = \frac{3}{2}$ , 故当

$$a = -\frac{5}{4}, \quad b = \frac{3}{2}, \quad c = 0$$

时旋转体体积取最小值.

**例 4.13** 设位于圆  $x^2 + (y-a)^2 \leq c^2$  ( $a > c > 0$ ) 内部, 而在抛物线  $x^2 = 2by$  ( $a > b > 0, c^2 > 2ab - b^2$ ) 外部的那部分区域为  $D$  (如图 4.6), 求  $D$  绕  $y$  轴旋转后所得旋转体的体积.

**解析** 设圆与抛物线的交点为  $A, B$ , 则它们的纵坐标  $\alpha, \beta$  是方程

$$2by + (y-a)^2 = c^2$$

的根. 因  $\alpha + \beta = 2(a-b), \alpha\beta = a^2 - c^2$ , 所以

$$\beta - \alpha = 2\sqrt{b^2 + c^2 - 2ab}.$$

旋转体体积为

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} [c^2 - (y-a)^2 - 2by] dy \\ &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} [(c^2 - a^2) - y^2 + 2(a-b)y] dy \\ &= \pi \left[ (c^2 - a^2)y - \frac{1}{3}y^3 + (a-b)y^2 \right] \Big|_{\alpha}^{\beta} \\ &= \pi(\beta - \alpha) \left[ -\alpha\beta - \frac{1}{3}(\beta^3 + \alpha\beta + \alpha^2) + \frac{1}{2}(\alpha + \beta)^2 \right] \\ &= \frac{\pi}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{4}{3}\pi(b^2 + c^2 - 2ab)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

**例 4.14** 求  $y = x, x^2 - y^2 = 2, x + y = \sqrt{2}, x + y = 3\sqrt{2}$  所围区域绕  $y = x$  旋转一周的立体体积.

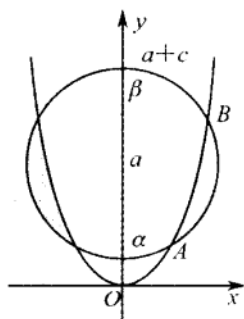


图 4.6



**解析** 作坐标系的旋转,将  $x$  轴逆时针旋转  $\frac{\pi}{4}$  得  $u$  轴, $y$  轴逆时针旋转  $\frac{\pi}{4}$  得  $v$  轴(图 4.7),则

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v), y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v),$$

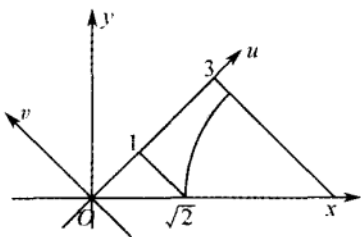


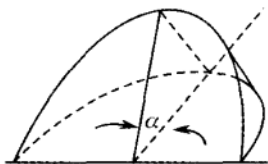
图 4.7

$y = x$  化为  $v = 0, x + y = \sqrt{2}$  化为  $u =$

$1, x + y = 3\sqrt{2}$  化为  $u = 3, x^2 - y^2 = 2$  化为  $uv = -1$ , 于是所求立体体积为

$$V = \pi \int_1^3 v^2 du = \pi \int_1^3 \left(-\frac{1}{u}\right)^2 du = \frac{2}{3}\pi.$$

**例 4.15** 设有一正椭圆柱体,其底面的长、短轴分别为  $2a, 2b$ . 用过此柱体底面的短轴且与底面成  $\alpha$  角  $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$  的平面截此柱体,得一楔形体(如图 4.8),求此楔形体的体积  $V$ .



4.8

**解析 方法 I**

底面椭圆的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 以垂直于  $y$  轴的平行平面截此楔

形体所得的截面为直角三角形,其一直角边长为  $a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$ , 另一直角

边长为  $a\sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \tan \alpha$ , 故截面面积为

$$S(y) = \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \tan \alpha,$$

楔形体的体积为

$$V = 2 \int_0^b \frac{a^2}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \tan \alpha dy$$



$$= \frac{2a^2b}{3} \tan \alpha.$$

**方法 II** 底面椭圆的方程为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 以垂直于  $x$  轴的平行

平面截此楔形所得的截面为矩形, 其一边长为  $2y = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ , 另一边长为  $x \tan \alpha$ , 故截面面积为

$$S(x) = 2bx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \tan \alpha,$$

楔形体的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a 2bx \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \tan \alpha dx \\ &= b \tan \alpha \left[ -\frac{2a^2}{3} \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^a = \frac{2a^2b}{3} \tan \alpha. \end{aligned}$$

**例 4.16** 过原点作曲线  $y = 1 + x^2 (x \geq 0)$  的切线, 求由此切线, 原曲线及  $y$  轴所围图形绕  $y$  轴旋转一周的旋转体的表面积.

**解析** 设切线与曲线  $y = 1 + x^2 (x \geq 0)$  的交点为  $(a, 1 + a^2)$ , 由于  $y' = 2x$ , 故切线的斜率为  $2a$ , 切线方程为

$$y - (1 + a^2) = 2a(x - a),$$

因切线过原点, 代入上式得  $-1 - a^2 = -2a^2$ , 由此得  $a = 1$ , 故切线方程为  $y = 2x$ .

设曲线  $y = 1 + x^2 (x \geq 0)$ , 切线  $y = 2x, x = 0$  所围图形为  $D$ , 下面来求图形  $D$  绕  $y$  轴旋转的旋转体的表面积  $S_y$ , 它由两部分组成; 切线段旋转生成的部分  $S_y^1$ , 曲线弧段旋转生成的部分  $S_y^2$ , 则

$$\begin{aligned} S_y^1 &= 2\pi \int_0^2 x \sqrt{1 + x'^2} dy \quad \left(x = \frac{1}{2}y\right) \\ &= \pi \int_0^2 y \sqrt{1 + \frac{1}{4}} dy = \pi\sqrt{5}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_y^2 &= 2\pi \int_1^2 x \sqrt{1+x'^2} dy \quad (x = \sqrt{y-1}) \\
 &= 2\pi \int_1^2 \sqrt{y-1} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sqrt{4y-3}}{\sqrt{y-1}} dy \\
 &= \pi \int_1^2 \sqrt{4y-3} dy = \frac{\pi}{6} (4y-3)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^2 \\
 &= \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1),
 \end{aligned}$$

于是图形  $D$  绕  $y$  轴旋转的旋转体的表面积为

$$S_y = S_y^1 + S_y^2 = \left( \frac{11}{6} \sqrt{5} - \frac{1}{6} \right) \pi.$$

**例 4.17** 设一容器由  $y = x^3$  ( $0 \leq x \leq 80(\text{cm})$ ) 绕  $y$  轴旋转而成, 今以  $8\text{cm}^3/\text{s}$  的速率向容器中倒水, 求水面上升到  $64\text{cm}$  时, 水面上升的速率和液面面积扩大的速率.

**解析** 设时刻  $t(\text{s})$  时液面的高度为  $y(\text{cm})$ , 则由题意有

$$\pi \int_0^y x^2 dy = \pi \int_0^y y^{\frac{2}{3}} dy = 8t,$$

上式对  $t$  求导得

$$\pi \frac{dy}{dt} \cdot y^{\frac{2}{3}} = 8,$$

令  $y = 64(\text{cm})$ , 代入上式解得  $\frac{dy}{dt} \Big|_{y=64} = \frac{1}{2\pi} (\text{cm/s})$ . 即液面上升到  $64\text{cm}$  时, 水面上升的速度为  $\frac{1}{2\pi} \text{cm/s}$ .

由于液面面积  $S = \pi x^2 = \pi y^{\frac{2}{3}}$ , 所以

$$\frac{dS}{dt} \Big|_{y=64} = \pi \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dt} \Big|_{y=64} = \frac{1}{12} (\text{cm/s}),$$

此即液面面积扩大的速率.

**例 4.18** 有两根长各为  $L$ , 质量各为  $M$  的均匀细棒, 位于同一直线上, 相距为  $a$ , 求两棒间的引力.

**解析** 取坐标轴  $x$  (图 4.9), 两根棒分别位于区间  $[-\frac{a}{2}-L, -\frac{a}{2}]$  与  $[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}+L]$  上, 在两棒上分别取微元  $dx_1$ ,  $dx_2$ , 则  $dx_1, dx_2$  的质量分别为  $\frac{M}{L}dx_1, \frac{M}{L}dx_2$ , 将它们视为质点, 分别位于  $x_1, x_2$ , 则右棒对质点  $x_1$  的引力为

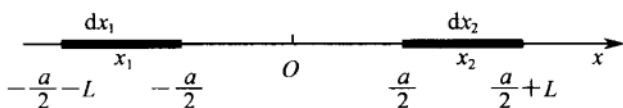


图 4.9

$$F(x_1) = \int_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L} \frac{kM^2 dx_1}{L^2(x_2 - x_1)^2} dx_2,$$

这里  $k$  为引力常数,  $x_1$  与  $dx_1$  视为参数, 于是

$$\begin{aligned} F(x_1) &= -\frac{kM^2}{L^2} dx_1 \frac{1}{x_2 - x_1} \Big|_{\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}+L} \\ &= k \frac{M^2}{L^2} \left( \frac{1}{\frac{a}{2} - x_1} - \frac{1}{\frac{a}{2} + L - x_1} \right) dx_1, \end{aligned}$$

因而两棒之间的引力为

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\frac{a}{2}-L}^{-\frac{a}{2}} k \frac{M^2}{L^2} \left( \frac{1}{\frac{a}{2} - x_1} - \frac{1}{\frac{a}{2} + L - x_1} \right) dx_1 \\ &= k \frac{M^2}{L^2} \ln \left| \frac{\frac{a}{2} + L - x_1}{\frac{a}{2} - x_1} \right| \Big|_{-\frac{a}{2}-L}^{-\frac{a}{2}} \\ &= k \frac{M^2}{L^2} \ln \frac{(a+L)^2}{a(a+2L)}. \end{aligned}$$

**例 4.19** 平放着的半径为  $r$ , 质量为  $M$  的均匀圆形薄板中心上空  $h$  处有一质量为  $m$  的质点, 求它们之间的引力. 设万有引力常数为  $k$ .

**解析** 取坐标系如图 4.10, 其中  $y$  轴通过圆心, 且与圆板垂直, 坐标原点在圆心. 任取  $x \in (0, r)$ , 以  $O$  为圆心, 分别以  $x$  与  $x + dx$  为半径作两个圆, 两个圆之间的圆环  $D$  的质量为  $\frac{2M}{r^2} x dx$  (取无穷小主部),

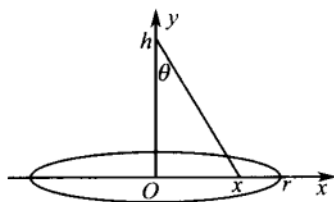


图 4.10

则圆环  $D$  对质点  $m$  的引力微元为

$$\begin{aligned} dF &= \frac{2kmM}{r^2(h^2 + x^2)} x \cos \theta dx \\ &= \frac{2khmM}{r^2(h^2 + x^2)^{3/2}} x dx, \end{aligned}$$

于是圆盘对质点  $m$  的引力为

$$\begin{aligned} F &= \int_0^r \frac{2khmM}{r^2(h^2 + x^2)^{3/2}} x dx \\ &= \frac{2khmM}{r^2} \left( \frac{1}{h} - \frac{1}{\sqrt{h^2 + r^2}} \right). \end{aligned}$$

**例 4.20** 一个半径  $R = 3\text{m}$ , 密度  $\rho = 2 \times 10^3 \text{kg/m}^3$  的实心球完全浸没在水中, 球顶部到水面的距离为  $16\text{m}$ , 求把球提高到球底部与水面相齐须做功多少?

**解析** 球的体积  $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 36\pi(\text{m}^3)$ , 球的重力为  $F = V\rho g = 72 \times 9.8 \times 10^3 \pi(\text{N})$ . 当球完全浸没在水中时, 浮力  $f_1 = V\rho_{\text{水}}g = 36 \times 9.8 \times 10^3 \pi(\text{N})$ , 所以将球顶部提高到与水面相齐时须做功

$$W_1 = (F - f_1) \times 16 = 5.76 \times 9.8 \times 10^5 \pi(\text{J}).$$

下面考虑将球继续上提的情况. 建立坐标系如图 4.11,  $y$  轴垂直向上, 坐标原点在水面. 则球底部  $A$  点从  $y = -6$  提高到  $y = 0$ , 设图中  $A$  点的坐标为  $A(0, y)$ , 则圆心的坐标为  $(0, y + 3)$ , 圆的方程为

$$X^2 + (Y - y - 3)^2 = 9.$$

设此时球在水面下部分的体积为  $V_1$ , 则

$$\begin{aligned}
 V_1 &= \pi \int_y^0 X^2 dY \\
 &= \pi \int_y^0 [9 - (Y - y - 3)^2] dY \\
 &= \pi \left[ 9Y - \frac{1}{3} (Y - y - 3)^3 \right] \Big|_y^0 \\
 &= \frac{\pi}{3} (9 + y) y^2.
 \end{aligned}$$

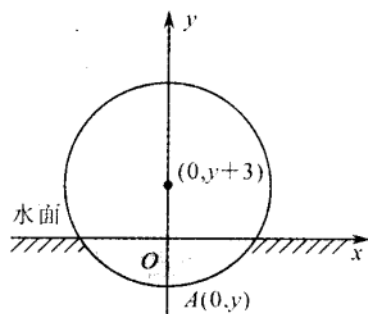


图 4.11

故此时球受到的浮力为

$$f_2 = V_1 \rho_{\text{水}} g = \frac{\pi}{3} \times 9.8(9 + y)y^2 \times 10^3 (\text{N}),$$

于是将球上提的拉力为

$$F_1 = F - f_2 = \left( 72 - \frac{1}{3} (9 + y)y^2 \right) \times 9.8 \times 10^3 \pi (\text{N}),$$

将球从  $y = -6$  提高到  $y = 0$  所作的功为

$$\begin{aligned}
 W_2 &= \int_{-6}^0 F_1 dy \\
 &= \int_{-6}^0 \left[ 72 - \frac{1}{3} (9 + y)y^2 \right] \times 9.8 \times 10^3 \pi dy \\
 &= \left( 72y - y^3 - \frac{1}{12} y^4 \right) \times 9.8 \times 10^3 \pi \Big|_{-6}^0 \\
 &= 3.24 \times 9.8 \times 10^5 \pi (\text{J}).
 \end{aligned}$$

于是本题所求的功为

$$\begin{aligned}
 W &= W_1 + W_2 = (5.76 + 3.24) \times 9.8 \times 10^5 \pi \\
 &= 8.82 \times 10^6 \pi (\text{J}).
 \end{aligned}$$

**例 4.21** 设某商品日产量为  $x$  件时的边际成本为  $50 + 0.2x$ , 固定成本为 200 元, 求成本函数. 若该商品销售单价为 150 元/件, 且产品全部售出, 求总利润函数, 并求日产量为多少时可能获得最大利润, 最大利润为多少?

**解析** 设  $C(x)$  为成本函数,  $R(x)$  为收益函数,  $L(x)$  为利润函

数, 则  $C'(x) = 50 + 0.2x$ , 积分得

$$\begin{aligned} C(x) &= C(0) + \int_0^x (50 + 0.2x) dx = 200 + (50x + 0.1x^2) \Big|_0^x \\ &= 200 + 50x + 0.1x^2; \end{aligned}$$

又  $R(x) = 150x$ ,  $L(x) = R(x) - C(x) = 100x - 0.1x^2 - 200$ , 则

$$L'(x) = R'(x) - C'(x) = 100 - 0.2x,$$

由  $L'(x) = 0$  得惟一驻点  $x = 500$  (件), 由于  $L'' = -0.2 < 0$ , 故当  $x = 500$  (件) 时  $L$  取极大值即最大值, 即日产量为 500 件时可获得最大利润, 最大利润为

$$L(500) = 100 \times 500 - 0.1(500)^2 - 200 = 24800 \text{ (元)}.$$

**例 4.22** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上严格单调, 其反函数为  $f^{-1}(x)$ , 若  $\alpha = f(a)$ ,  $\beta = f(b)$ , 试证:

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^\beta f^{-1}(x) dx = b\beta - a\alpha.$$

**解析** 作换元变换, 令  $f(x) = y$ , 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_a^\beta y df^{-1}(y) \quad (\text{分部积分}) \\ &= yf^{-1}(y) \Big|_a^\beta - \int_a^\beta f^{-1}(y) dy \\ &= \beta f^{-1}(\beta) - \alpha f^{-1}(\alpha) - \int_a^\beta f^{-1}(x) dx \\ &= b\beta - a\alpha - \int_a^\beta f^{-1}(x) dx. \end{aligned}$$

于是

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^\beta f^{-1}(x) dx = b\beta - a\alpha.$$

**例 4.23** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $g(x) \neq 0$ , 试证: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f(\xi) \int_a^b g(x) dx = g(\xi) \int_a^b f(x) dx.$$

**解析** 令  $F(x) = \int_a^x f(x)dx, G(x) = \int_a^x g(x)dx$ , 因  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 故  $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$ , 即  $F(x), G(x)$  在  $[a, b]$  上可导. 又  $G'(x) = g(x) \neq 0$ , 在  $[a, b]$  上对  $F(x), G(x)$  应用柯西中值定理, 必存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

因  $F(b) = \int_a^b f(x)dx, F(a) = 0, G(b) = \int_a^b g(x)dx, g(a) = 0, F'(\xi) = f(\xi), G'(\xi) = g(\xi)$ , 且  $G(b) \neq 0, g(\xi) \neq 0$ , 由此即得原等式成立.

**例 4.24** 设  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 求证: 存在  $\xi \in (a, b)$  使得

$$f(\xi) \int_a^\xi g(x)dx = g(\xi) \int_\xi^b f(x)dx.$$

**解析** 用积分法构造辅助函数. 令

$$F'(x) = f(x) \int_a^x g(t)dt - g(x) \int_x^b f(t)dt,$$

并令  $\int_a^x g(t)dt = \varphi(x), \int_x^b f(t)dx = \psi(x)$ , 则  $\varphi'(x) = g(x), \psi'(x) = -f(x)$ , 上式两边积分得

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x)\varphi(x)dx - \int g(x)\psi(x)dx \\ &= -\int \psi'(x)\varphi(x)dx - \int \varphi'(x)\psi(x)dx \\ &= -\int \varphi(x)d\psi(x) - \int \psi(x)d\varphi(x) \\ &= -\varphi(x)\psi(x) + \int \psi(x)d\varphi(x) - \int \psi(x)d\varphi(x) \\ &= -\varphi(x)\psi(x) + C = -\int_a^x g(t)dt \cdot \int_x^b f(t)dt + C. \end{aligned}$$



只要验证  $F(x)$  满足罗尔定理的条件即可 (取  $C=0$ ). 因  $F(x)$  在  $[a, b]$  上可导, 且  $F(a) = F(b) = 0$ , 应用罗尔定理, 必存在  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $F'(\xi) = 0$ , 即

$$f(\xi) \int_a^{\xi} g(x) dx - g(\xi) \int_{\xi}^b f(x) dx = 0,$$

原式得证.

**例 4.25** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增加, 连续, 求证:

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx.$$

**解析** 令

$$F(x) = 2 \int_a^x t f(t) dt - (a+x) \int_a^x f(t) dt,$$

这里  $a \leq x \leq b$ , 则  $F(a) = 0$ , 由于

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2xf(x) - \int_a^x f(t) dt - (a+x)f(x) \\ &= xf(x) - af(x) - f(\xi)(x-a) \\ &= (x-a)(f(x) - f(\xi)), \end{aligned}$$

其中  $a < \xi < x$ ,  $\xi$  是应用积分中值定理得到的, 而  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调增, 所以  $f(x) \geq f(\xi)$ , 于是  $F'(x) \geq 0$ , 故  $F(x)$  在  $[a, b]$  上单调增,  $F(b) \geq F(a) = 0$ , 故

$$2 \int_a^b x f(x) dx \geq (a+b) \int_a^b f(x) dx.$$

**例 4.26** 设函数  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 求证施瓦兹 (Schwarz) 不等式:

$$\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

**解析** 记

$$F(u) = \int_a^u f^2(x) dx \cdot \int_a^u g^2(x) dx - \left( \int_a^u f(x) g(x) dx \right)^2,$$

则  $F(a) = 0$ , 当  $u \geq a$  时

$$\begin{aligned}
 F'(u) &= f^2(u) \int_a^u g^2(x) dx + g^2(u) \int_a^u f^2(x) dx - \\
 &\quad 2f(u)g(u) \int_a^u f(x)g(x) dx \\
 &= \int_a^u [f^2(u)g^2(x) + f^2(x)g^2(u) - \\
 &\quad 2f(u)f(x)g(x)g(u)] dx.
 \end{aligned}$$

由于  $f^2(u)g^2(x) + f^2(x)g^2(u) \geq 2f(u)f(x)g(x)g(u)$ , 所以上式右端的积分非负值, 故  $F'(u) \geq 0 (u \geq a)$ , 因而  $F(u)$  在  $[a, b]$  单调增,  $F(b) \geq F(a) = 0$ , 即得

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx.$$

**例 4.27** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续可导,  $f(a) = 0$ , 求证:

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b [f'(x)]^2 dx.$$

**解析** 由于

$$\int_a^x f'(x) dx = f(x) - f(a) = f(x),$$

两边平方, 应用施瓦兹不等式得

$$\begin{aligned}
 f^2(x) &= \left( \int_a^x f'(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^x 1^2 dx \right) \left( \int_a^x f'^2(x) dx \right) \\
 &\leq (x-a) \int_a^x f'^2(x) dx,
 \end{aligned}$$

上式两端积分得

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f^2(x) dx &\leq \int_a^b (x-a) dx \cdot \int_a^b f'^2(x) dx \\
 &= \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'^2(x) dx.
 \end{aligned}$$

**例 4.28** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续可导,  $f(0) = 0, 0 < f'(x) < 1$ , 求证:

$$\int_0^1 f^3(x) dx \leq \left( \int_0^1 f(x) dx \right)^2 \leq \int_0^1 f^2(x) dx.$$

**解析** 右边不等式由施瓦兹不等式即得,

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 \leq \int_0^1 1^2 dx \cdot \int_0^1 f^2(x) dx = \int_0^1 f^2(x) dx;$$

下面来证明左边不等式. 先证: 当  $0 < x \leq 1$  时

$$\int_0^x f^3(x) dx \leq \left(\int_0^x f(x) dx\right)^2. \quad (1)$$

令

$$F(x) = \left(\int_0^x f(x) dx\right)^2 - \int_0^x f^3(x) dx, \quad (2)$$

则  $F(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2f(x) \int_0^x f(x) dx - f^3(x) \\ &= f(x) \left(2 \int_0^x f(x) dx - f^2(x)\right), \end{aligned}$$

记  $G(x) = 2 \int_0^x f(x) dx - f^2(x)$ , 则  $G(0) = 0$ ,

$$G'(x) = 2f(x) - 2f(x)f'(x) = 2f(x)(1 - f'(x)).$$

由于  $0 < f'(x) < 1$ ,  $f(0) = 0 \Rightarrow f(x)$  严格增  $\Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow G'(x) > 0 \Rightarrow G(x)$  严格增  $\Rightarrow G(x) > 0 \Rightarrow F'(x) > 0 \Rightarrow F(x)$  严格增  $\Rightarrow F(x) > 0$ . 所以(1)式得证. 令  $x = 1$  即得原不等式的左边不等式成立.

**例 4.29** 设  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$ , 求证:  $n > 2$  时

$$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}.$$

**解析** 方法 I 由于

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n d(\tan x) = \frac{1}{n+1} (\tan x)^{n+1} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

又  $0 < x < \frac{\pi}{4}$  时,  $0 < \tan x < 1$ , 所以  $I_n$  严格减, 所以

$$2I_{n+2} < \frac{1}{n+1} = I_n + I_{n+2} < 2I_n,$$

于是  $I_n > \frac{1}{2(n+1)}$ ;  $I_{n+2} < \frac{1}{2(n+1)}$ , 在第二式中改  $n+2$  为  $n$  即得

$$\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}.$$

**方法 II** 应用换元变换, 令  $\tan x = t$ , 则

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{2t} dt \\ &= \frac{1}{2} \frac{t^n}{n} \Big|_0^1 = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2(n-1)}, \end{aligned}$$

另一方面,

$$I_n \geq \frac{1}{2} \int_0^1 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{2(n+1)} \Big|_0^1 = \frac{1}{2(n+1)},$$

即得原不等式成立.

**例 4.30** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续可导,  $f(0) = f(1) = 0$ , 求证:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

**解析** **方法 I** 因  $f'(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 所以存在  $M > 0$ , 使得

$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

任取  $x \in (0, 1)$ , 则由拉格朗日中值定理得

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)x, \quad 0 < \xi < x;$$

$$f(x) - f(1) = f'(\eta)(x-1), \quad x < \eta < 1.$$

于是  $0 < x < 1$  时有

$$|f(x)| = |f'(\xi)| |x| \leq Mx,$$

$$|f(x)| = |f'(\eta)| |x-1| \leq M(1-x).$$

故

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^x |f(x)| dx + \int_x^1 |f(x)| dx \\
 &\leq M \left( \int_0^x dx + \int_x^1 (1-x) dx \right) \\
 &= M \left( x^2 - x + \frac{1}{2} \right) \quad (0 \leq x \leq 1),
 \end{aligned}$$

记  $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$ , 则  $y' = 2x - 1$ . 由  $y' = 0$  得  $x = \frac{1}{2}$ , 因  $y'' = 2 > 0$ ,

所以  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  为  $y = x^2 - x + \frac{1}{2}$  的最小值. 于是

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{M}{4} = \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

**方法 II** 由于

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) d\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
 &= f(x) \left(x - \frac{1}{2}\right) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx \\
 &= - \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x) dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^1 f(x) dx \right| &\leq \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| |f'(x)| dx \\
 &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)| \cdot \int_0^1 \left| x - \frac{1}{2} \right| dx \\
 &= \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.
 \end{aligned}$$

**例 4.31** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶连续可导, 求证:

$$\int_a^b f(x) dx \leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} (b-a)^3 \max_{a \leq x \leq b} f''(x).$$

**解析** 将  $f(x)$  在  $x = \frac{a+b}{2}$  处展为一阶泰勒展式得

$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2,$$

这里  $\xi$  介于  $\frac{a+b}{2}$  与  $x$  之间 ( $x \in [a, b]$ ). 两边积分得

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + 0 + \frac{1}{2} \int_a^b f''(\xi) \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 dx \\ &\leq (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} \max_{a \leq x \leq b} f''(x) \cdot \frac{1}{3} \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3 \Big|_a^b \\ &= (b-a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24} \max_{a \leq x \leq b} f''(x) \cdot (b-a)^3. \end{aligned}$$

**例 4.32** 设  $f(x)$  连续, 求证:

$$\int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{1}{x} dx = \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{1}{x} dx.$$

**解析** 令  $x^2 = t$ , 则  $2x dx = dt$ ,  $\frac{1}{x} dx = \frac{x dx}{x^2} = \frac{dt}{2t}$ , 所以

$$\begin{aligned} \int_1^a f\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right) \frac{1}{x} dx &= \int_1^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{dt}{2t} \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_1^a f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{1}{t} dt + \int_a^{a^2} f\left(t + \frac{a^2}{t}\right) \frac{1}{t} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{1}{x} dx + \int_a^{a^2} f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{1}{x} dx \right), \quad (1) \end{aligned}$$

在右端第二个积分中, 令  $\frac{a^2}{x} = t$ , 则  $-\frac{a^2}{x^2} dx = dt$ ,  $\frac{1}{x} dx = -\frac{1}{t} dt$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^{a^2} f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{1}{x} dx &= - \int_a^1 f\left(\frac{a^2}{t} + t\right) \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^a f\left(x + \frac{a^2}{x}\right) \frac{1}{x} dx, \quad (2) \end{aligned}$$

将(2)式代入(1)式右端, 即得原式成立.

**例 4.33** 求  $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}.$

解析 作换元变换, 令  $x-2=t^2$ ,

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_0^{+\infty} \frac{2t}{(9+t^2)t} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{9+t^2} dt \\ &= \frac{2}{3} \arctan \frac{t}{3} \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{3}.\end{aligned}$$

例 4.34 求  $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}}$ .

解析 由于被积函数中有绝对值, 先将其分段表示为

$$|x-x^2| = \begin{cases} x-x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ x^2-x, & x < 0 \text{ 或 } x > 1, \end{cases}$$

于是

$$\text{原式} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx + \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} dx,$$

这里的积分皆为广义积分,  $x=1$  为奇点, 应用广义牛顿-莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} &= \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \arcsin(2x-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^{1-} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x^2-x}} &= \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} \\ &= \ln \left[ \left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right] \Big|_{1+}^{\frac{3}{2}} \\ &= \ln(2+\sqrt{3}),\end{aligned}$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{|x-x^2|}} = \frac{\pi}{2} + \ln(2+\sqrt{3}).$$

例 4.35 求  $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx$ .

解析 原式  $= \int_0^{+\infty} \frac{xe^x}{(1+e^x)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+e^x)^2} d(1+e^x)$   
 $= -\int_0^{+\infty} x d \frac{1}{1+e^x} = -\frac{x}{1+e^x} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$   
 $= \int_0^{+\infty} \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = (x - \ln(1+e^x)) \Big|_0^{+\infty}$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(1+e^x)) + \ln 2$   
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{1+e^x} + \ln 2 = \ln 1 + \ln 2 = \ln 2.$

例 4.36 求  $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ .

解析 先求原函数, 分部积分得

$$\begin{aligned} \int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx &= -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{1+x^2 - x^2}{x(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C, \end{aligned}$$

于是由广义牛顿-莱布尼兹公式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \left( -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \Big|_{0+}^{+\infty} \\ &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0+} \left( -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{2} \ln x \cdot \frac{-x^2}{1+x^2} - \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{4} \ln(1+x^2) \end{aligned}$$



$$= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - 0 = 0.$$

**评注** 本例若直接应用广义分部积分公式,

$$\text{原式} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\ln x}{(1+x^2)} \Big|_{0^+}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

这里  $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2} \frac{\ln x}{1+x^2} = +\infty$ ; 且  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} dx$  因有奇点  $x=0$  (对原式广义积分,  $x=0$  不是奇点), 它是发散的. 所以在上述解法中采用先求原函数, 再用广义牛顿-莱布尼兹公式的解法.

**例 4.37** 求  $\int_3^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^4 \sqrt{x^2-2x}} dx.$

**解析** 令  $x = 1 + \sec t$ , 则  $x = 3$  时  $t = t_0 = \operatorname{arcsec} 2$ ,  $x \rightarrow +\infty$  时  $t \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sec^4 t \cdot \tan t} \cdot \sec t \cdot \tan t dt \\ &= \int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \int_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 t) d(\sin t) \\ &= \left( \sin t - \frac{1}{3} \sin^3 t \right) \Big|_{t_0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3} - \left( \sin t_0 - \frac{1}{3} \sin^3 t_0 \right), \end{aligned}$$

由于  $\sec t_0 = 2$ , 所以  $\cos t_0 = \frac{1}{2}$ ,  $\sin t_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$\sin t_0 - \frac{1}{3} \sin^3 t_0 = \frac{3}{8} \sqrt{3},$$

于是原式  $= \frac{2}{3} - \frac{3}{8} \sqrt{3}$ .

**例 4.38** 已知  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx$ , 求常数  $a$ .

**解析** 分别计算原式的两端,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-a}{x+a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{-2a}{x+a} \right)^{\frac{x+a}{-2a} \cdot \frac{-2ax}{x+a}} = \exp \left( \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2ax}{x+a} \right) = e^{-2a},$$

$$\begin{aligned}
 \int_a^{+\infty} 4x^2 e^{-2x} dx &= -2 \int_a^{+\infty} x^2 d(e^{-2x}) = -2 \cdot \frac{x^2}{e^{2x}} \Big|_a^{+\infty} + 2 \int_a^{+\infty} e^{-2x} 2x dx \\
 &= 2a^2 e^{-2a} - 2 \int_a^{+\infty} x d(e^{-2x}) \\
 &= 2a^2 e^{-2a} - 2xe^{-2x} \Big|_a^{+\infty} + 2 \int_a^{+\infty} e^{-2x} dx \\
 &= 2a^2 e^{-2a} + 2ae^{-2a} - e^{-2x} \Big|_a^{+\infty} \\
 &= e^{-2a} (2a^2 + 2a + 1),
 \end{aligned}$$

于是  $2a^2 + 2a + 1 = 1$ , 由此解得  $a = 0$  或  $-1$ .

**例 4.39** 证明不等式:

$$\frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{e} \right) < \int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx < 1 + \frac{1}{3e}.$$

**解析** 
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx = \int_0^1 e^{-x^3} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^3} dx$$

$$< \int_0^1 1 dx + \int_1^{+\infty} x^2 e^{-x^3} dx = 1 + \frac{1}{3e},$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx > \int_0^1 e^{-x^3} dx > \int_0^1 x^2 e^{-x^3} dx = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{1}{e} \right).$$

**例 4.40** 求  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^9 dx$ .

**解析** 令  $x^2 = t$ , 则

$$\text{原式} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^4 dt = \frac{1}{2} \Gamma(5) = \frac{1}{2} 4! = 12.$$

**例 4.41** 求  $\int_0^1 x^9 (1-x^2)^{10} dx$ .

**解析** 令  $x^2 = t$ , 则

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \frac{1}{2} \int_0^1 t^4 (1-t)^{10} dt = \frac{1}{2} B(5, 11) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(5) \Gamma(11)}{\Gamma(16)} = \frac{1}{2} \frac{4! \cdot 10!}{15!} = \frac{1}{30030}.
 \end{aligned}$$

**例 4.42** 求  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \cos^6 x dx$ .

**解析** 应用上题公式(1), 令  $2x-1=8, 2y-1=6$ , 得  $x=\frac{9}{2}$ ,  
 $y=\frac{7}{2}$ , 故

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} B\left(\frac{9}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(8)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7!} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{5}{2^{12}} \pi = \frac{5}{4096} \pi. \end{aligned}$$

**例 4.43** 讨论广义积分  $\int_1^3 \frac{1}{(3-x)^p \sqrt{-x^2+4x-3}} dx$  的敛散性.

**解析**  $x=1, 3$  是惟二奇点. 记  $f(x) = \frac{1}{(3-x)^{p+\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{1}{2}}}$ ,

$$\text{原式} = \int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \equiv I_1 + I_2.$$

对于  $I_1$ , 当  $x \rightarrow 1+$  时, 因

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2} 2^p (x-1)^{1/2}},$$

所以  $I_1$  对一切实数  $p$  收敛; 对于  $I_2$ , 当  $x \rightarrow 3-$  时, 因

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2} (3-x)^{p+\frac{1}{2}}},$$

所以仅当  $p+\frac{1}{2} < 1$ , 即  $p < \frac{1}{2}$  时  $I_2$  收敛. 综合得: 仅当  $p < \frac{1}{2}$  时原广义积分收敛.

**例 4.44** 对参数  $p, q$  讨论广义积分  $\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{1+x^q} dx$  的敛散性.

**解析**  $x=0, +\infty$  是惟二奇点. 对于  $x=0$ , 因为

$$f(x) = \frac{x^p}{1+x^q} \sim \begin{cases} x^p, & \text{当 } q \geq 0, \\ x^{p-q}, & \text{当 } q < 0, \end{cases} \quad (x \rightarrow 0+),$$

所以仅当  $p > -1, q \geq 0$  或  $q < p+1, q < 0$  时  $\int_0^1 f(x) dx$  收敛. 对于  $x = +\infty$ , 因为

$$f(x) = \frac{x^p}{1+x^q} \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{q-p}}, & \text{当 } q \geq 0, \\ x^p, & \text{当 } q < 0, \end{cases} \quad (x \rightarrow +\infty),$$

所以仅当  $q-p > 1, q \geq 0$  或  $-p > 1, q < 0$  时  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛.

上述广义积分的收敛域的交集

$$0 < p+1 < q \quad \text{或} \quad q < p+1 < 0$$

即为原广义积分的收敛域.

**例 4.45** 讨论  $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} dx$  ( $a > 0, \beta > 0$ ) 的敛散性.

**解析**  $x=0, +\infty$  是惟二奇点,

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} dx \equiv I_1 + I_2.$$

对于  $I_1$ , 当  $x \rightarrow 0+$  时, 因

$$f(x) = \frac{\ln(1+x^a)}{x^\beta} \sim \frac{1}{x^{\beta-a}},$$

所以仅当  $\beta-a < 1$ , 即  $\beta < 1+a$  时  $I_1$  收敛; 对于  $I_2$ , 当  $\beta > 1$  时, 取  $\lambda$ , 使得  $1 < \lambda < \beta$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\lambda \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^a)}{x^{\beta+\lambda}} = 0,$$

所以  $\beta > 1$  时  $I_2$  收敛. 当  $\beta \leq 1$  时, 取  $\lambda = 1$ , 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^1 \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1-\beta} \ln(1+x^a) = +\infty,$$

所以  $\beta \leq 1$  时  $I_2$  发散. 综合得: 仅当  $1 < \beta < 1+a$  时原广义积分收敛.

## 阶段复习试题二

1. 设  $f'(e^x) = 1 + x$ ,  $f(1) = 1$ , 求  $f(x)$ .

2. 设  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\ln x}{x}$ , 求  $\int x f'(2x) dx$ .

3. 求下列不定积分:

$$(1) \int (x-1)^2 (x-4)^{12} dx; \quad (2) \int \ln(1+\sqrt{x}) dx;$$

$$(3) \int \sin^2 x \cdot \cos^4 x dx; \quad (4) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(5) \int \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}} dx; \quad (6) \int \frac{1}{x\sqrt{x^4+x^2+1}} dx;$$

$$(7) \int \frac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x} dx; \quad (8) \int \frac{x \sin x}{\cos^3 x} dx;$$

$$(9) \int \frac{\ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}]}{(x+a)(x+b)} dx; \quad (10) \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx;$$

$$(11) \int x \arctan \sqrt{x} dx; \quad (12) \int \frac{x^2}{x^4-1} dx;$$

$$(13) \int \frac{\ln x}{\sqrt{x-2}} dx; \quad (14) \int (\arcsin x)^2 dx;$$

$$(15) \int \frac{\operatorname{arccot} x}{(x^2+1)x^2} dx; \quad (16) \int \frac{x e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx;$$

$$(17) \int \frac{x - \ln x}{x^2} dx; \quad (18) \int \frac{x(1-2\ln x)}{(x^2 - \ln x)^2} dx.$$

4. 求下列定积分:

$$(1) \int_0^1 x^2 \arcsin x dx;$$

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \quad (a^2 + b^2 \neq 0);$$

- (3)  $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{1}{x \sqrt{3x^4 + x^2 + 1}} dx$ ; (4)  $\int_1^e \cos(\ln x) dx$ ;  
 (5)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$ ; (6)  $\int_{-1}^1 \frac{x}{x - \sqrt{1+x^2}} dx$ ;  
 (7)  $\int_0^a \arctan \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \quad (a > 0)$ ; (8)  $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx$ ;  
 (9)  $\int_1^{16} \arctan \sqrt{\sqrt{x} - 1} dx$ ; (10)  $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$ ;  
 (11)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} dx$ ; (12)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1 + e^x} \sin^4 x dx$ .

5. 设  $I(x) = \int_{-1}^x \frac{t \cos \frac{\pi}{2} t}{\sqrt{1+t^2}} dt$ , 求  $I(x)$  在  $[\frac{1}{2}, 2]$  上的极值.

6. 求函数  $y = \int_0^x (1+t) \arctan t dt$  的极小值.

7. 求函数  $y = \int_0^1 |x^2 - t^2| dt \quad (x > 0)$  的最值.

8. 求函数  $y = \int_1^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}} dt$  在  $[-1, 1]$  上的最值.

9. 已知  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\int_0^{t^2} x \ln(1-ax) dx}{t^6} = 1$ , 求  $a$ .

10. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上二阶可导, 求

$$\int_0^1 x f''(a + (b-a)x) dx.$$

11. 设  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t^2}} dt = 4$ , 求  $a, b$ .

12. 设  $g(x) = \int_a^b |x-t| f(t) dt$ , 这里  $f(t)$  在  $[a, b]$  上连续, 求  $g''(x)$ .

13. 区域  $D$  由  $y = 18 - x^2, x = 0, y = 2, x = 25$  围成, 动直线

$MN$  的初始位置与  $y$  轴重合,并以变速  $v = 2t$  向右平行移动,试将  $MN$  扫过的  $D$  的部分区域的面积  $S$  表示为时间  $t$  的函数.

14. 求抛物线  $y = \frac{1}{4}x^2$  与其上点  $(2,1)$  处的法线所围图形的面积.

15. 设圆  $\rho = \sqrt{3}\sin\theta$  被心形线  $\rho = 1 + \cos\theta$  分割成两部分,求这两部分的面积.

16. 求极坐标下  $\rho = \sqrt{\theta}\cos\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ) 所围区域的面积.

17. 求极坐标方程  $\rho = a(1 + \cos\theta)$  与  $\rho = 3a\cos\theta$  所围区域的面积.

18. 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可导,  $f'(x) > 0$ , 求证存在惟一的  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $y = f(x), x = a, y = f(\xi)$  所围区域的面积等于  $y = f(x), x = b, y = f(\xi)$  所围区域面积的 3 倍.

19. 求由  $y = x\sin x, y = x$  ( $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 所围图形的面积, 并求此图形绕  $x$  轴旋转一周的旋转体体积.

20. 求由  $(x-2)^2 + y^2 = 1$  所围的区域绕  $y$  轴旋转一周的旋转体体积.

21. 求由  $y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1$  所围区域绕  $y$  轴旋转一周的旋转体体积.

22. 求  $y = \sqrt{1+x^2}$  与  $x = 0, x = 1, y = 0$  所围区域绕  $y$  轴旋转一周的旋转体体积.

23. 求  $x = \sqrt{4-y}, x = \sqrt{4-2y}, x = 0$  所围平面区域边界的周长.

24. 求由心形线  $\rho = 1 + \cos\theta$  与坐标轴所围第一象限的部分图形绕  $x$  轴旋转一周所得旋转体体积.

25. 求由  $ay^2 = x^3$  ( $a > 0$ ),  $x = a, y = 0$  所围平面区域绕  $x =$

$a$  旋转一周的旋转体体积.

26. 设  $y = 1 - \int_0^x t e^{-t^2} dt$  ( $|x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ), 此曲线绕  $x$  轴旋转一周的立体体积为  $V$ , 求证

$$\sqrt{\frac{2}{e}}\pi \leq V \leq \sqrt{2}\pi.$$

27. 求  $y = \ln \sin x$  ( $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ) 的弧长.

28. 求下列广义积分:

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} (e^{-ax^2} - e^{-bx^2}) dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \min\left(e^{-x}, \frac{1}{2}\right) dx.$$

29. 判别下列广义积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x}} dx; \quad (2) \int_0^1 \frac{x \sin x}{x - \sin x} dx;$$

$$(3) \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{\ln x}} dx; \quad (4) \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx.$$

30. 讨论下列广义积分的敛散性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} dx; \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^\lambda x \cdot \cos^\mu x} dx.$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{x^\mu \arctan x}{3+x^\lambda} dx (\lambda \geq 0); \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p \ln^q(1+x)} dx;$$

$$(5) \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \ln x dx; \quad (6) \int_0^1 \frac{\ln x}{(1-x^2)^\alpha (\tan \frac{\pi}{2} x)^\beta} dx.$$

31. 求下列广义积分:

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{5}{2}} dx; \quad (2) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^7 dx;$$

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} dx; \quad (4) \int_0^\pi \sin^{100} x dx.$$



## 5

## 空间解析几何

## 5.1 基本概念与内容提要

## 1) 空间直角坐标系

坐标原点,坐标轴,坐标平面,卦限,点的坐标. 两点距离公式. 一点关于坐标平面、坐标轴、坐标原点的对称点的坐标.

## 2) \* 向量的基本概念

向量在几何上为有向线段. 若  $\mathbf{a} = \overrightarrow{PQ}$ , 将  $\overrightarrow{PQ}$  平行移动使其起点  $P$  与原点  $O$  重合, 若终点  $Q$  移至  $M$  处, 则  $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OM}$ , 若点  $M$  的坐标为  $M(a_1, a_2, a_3)$ , 则  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = (a_1, a_2, a_3)$  (或  $\{a_1, a_2, a_3\}$ ), 此式称为向量的坐标表示式. 称

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \mathbf{j} = (0, 1, 0), \mathbf{k} = (0, 0, 1)$$

为基向量. 向量的模、方向数和方向余弦.

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|}, \cos \beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|}, \cos \gamma = \frac{a_3}{|\mathbf{a}|}.$$

## 3) \* 向量的运算和运算性质

向量的加(减)法服从平行四边形法则. 内量的内积(又称数量积)定义为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

它的射影表示式为

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{a}} \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \operatorname{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}.$$

向量的外积(又称向量积)定义为

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{c}^0,$$

这里  $\mathbf{c}^0$  是同时垂直于  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的单位向量, 且  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}^0$  组成右手系. 向量  $\mathbf{a}$  与  $\mathbf{b}$  的外积的模等于以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为邻边的平行四边形的面积.

向量的混合积定义为

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}).$$

向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  的混合积的绝对值等于以  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为棱的平行六面体的体积.

设  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3), \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3), \lambda \in \mathbf{R}$ , 则有坐标计算公式

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3);$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3);$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3;$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left( \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right);$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0;$$

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0};$$

$$\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};$$

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 共面} \Leftrightarrow [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0.$$

#### 4) \* 空间平面的方程

(1) 点法式. 通过点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 法向量为  $\mathbf{n} = (A, B, C)$  的平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

(2) 一般式. 平面的一般式方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

这里  $A, B, C$  不全为 0. 当  $D = 0$  时, 该平面过原点; 当  $A, B, C$  中有一个为 0 时, 该平面垂直于某坐标平面; 当  $A, B, C$  中有两个为 0 时, 该平面平行于某坐标平面.  $xy$  平面,  $yz$  平面和  $zx$  平面的方程分别为  $z = 0, x = 0$  和  $y = 0$ .

(3) 截距式. 在  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴上的截距分别为  $a, b, c$  ( $abc \neq 0$ ) 的平面方程为

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

(4) 三点式. 过不在一条直线上的三点  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$  的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

### 5) \* 空间直线的方程

(1) 点向式. 通过点  $(x_0, y_0, z_0)$ , 方向向量为  $l = (m, n, p)$  的直线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

(2) 一般式.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

即直线为两个平面的交线.

(3) 两点式. 通过两点  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

(4) 参数式.

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt,$$

这里  $t$  为参数.  $(x_0, y_0, z_0)$  为直线上一定点,  $\boldsymbol{l} = (m, n, p)$  为直线的方向向量.

### 6) 平面与平面的关系

设两平面  $\Pi_1$  与  $\Pi_2$  的法向量分别为  $\boldsymbol{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ ,  $\boldsymbol{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ , 则

$$\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

### 7) 直线与直线的关系

设两直线  $L_1$  与  $L_2$  的方向向量分别为  $\boldsymbol{l}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ ,  $\boldsymbol{l}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ , 则

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

$$L_1 \text{ 与 } L_2 \text{ 共面} \Leftrightarrow [\boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \overrightarrow{P_1 P_2}] = 0,$$

这里  $P_1, P_2$  分别为  $L_1$  与  $L_2$  上的两个定点.

### 8) 直线与平面的关系

设直线  $L$  的方向向量为  $\boldsymbol{l} = (m, n, p)$ , 平面  $\Pi$  的法向量为  $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ , 则

$$L // \Pi \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0.$$

$$L \perp \Pi \Leftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}.$$

### 9) \* 点到平面(或直线)的距离与异面直线的距离

(1) 点  $(x_0, y_0, z_0)$  到平面  $Ax + By + Cz + D = 0$  的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

(2) 设直线  $L$  过点  $P$ , 其方向向量为  $\boldsymbol{l}$ , 则点  $M$  到直线  $L$  的距离为

$$d = \frac{|\overrightarrow{PM} \times \mathbf{l}|}{|\mathbf{l}|}.$$

(3) 设直线  $L_1$  过点  $P_1$ , 其方向向量为  $\mathbf{l}_1$ , 直线  $L_2$  过点  $P_2$ , 其方向向量为  $\mathbf{l}_2$ , 则  $L_1$  与  $L_2$  的距离(即公垂线的长)为

$$d = |\text{Prj}_{\mathbf{l}} \overrightarrow{P_1 P_2}| = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \cdot \mathbf{l}|}{|\mathbf{l}|},$$

这里  $\mathbf{l} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$ .

### 10) 平面束概念

通过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束方程为

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

这里  $\lambda$  为参数,  $\lambda$  可以  $\rightarrow \infty$ .

### 11) 曲面方程的概念

(1) 空间曲面的一般式方程为  $F(x, y, z) = 0$  (隐函数形式) 与  $z = f(x, y)$  (显函数形式).

(2) \* 球面. 球面方程的一般形式为

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

标准形式为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2,$$

它是以  $(a, b, c)$  为球心, 以  $R$  为半径的球面.

(3) 柱面. 形如  $F(x, y) = 0$ , 或  $G(y, z) = 0$ , 或  $H(z, x) = 0$  的方程表示母线平行于坐标轴(分别为  $z$  轴、 $x$  轴与  $y$  轴)的柱面.

(4) \* 旋转曲面.  $xy$  平面上的曲线  $y = f(x^2)$ , 即

$$\begin{cases} y = f(x^2), \\ z = 0, \end{cases}$$

绕  $y$  轴旋转一周的旋转曲面的方程为

$$y = f(x^2 + z^2);$$

$xy$  平面上的曲线  $x = f(y^2)$ , 即

$$\begin{cases} x = f(y^2), \\ z = 0, \end{cases}$$

绕  $x$  轴旋转一周的旋转曲面的方程为

$$x = f(y^2 + z^2).$$

坐标平面内的曲线绕坐标轴旋转的旋转曲面方程的其它情况可类似得到.

### 12) 二次曲面的标准方程

(1) 椭球面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

(2) 单叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

(3) 双叶双曲面  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$

(4) 椭圆抛物面  $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$

(5) 双曲抛物面  $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

(6) 二次锥面  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

### 13) 空间曲线方程的概念

(1) 空间曲线的一般式方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ H(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

即空间两个曲面的交线. 空间曲线的参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t),$$

这里  $t$  为参数.

(2) 空间曲线在坐标平面内的投影.



**14) \* 空间曲面的切平面和法线**

设有空间曲面  $\Sigma: F(x, y, z) = 0$ , 函数  $F$  可微(见 6.1, 6), 则

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z)$$

为曲面  $\Sigma$  的法向量. 曲面  $\Sigma$  的过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的切平面方程为

$$F'_x(P_0)(x - x_0) + F'_y(P_0)(y - y_0) + F'_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

**15) 空间曲线的切线和法平面**

(1) 设有空间曲线

$$\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ H(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

函数  $F, H$  可微, 则

$$\mathbf{l} = (F'_x, F'_y, F'_z) \times (H'_x, H'_y, H'_z)$$

为曲线  $\Gamma$  的切向量. 曲线  $\Gamma$  的过点  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

这里  $m, n, p$  为曲线  $\Gamma$  在点  $P_0$  的切向量  $\mathbf{l}$  的方向数.

(2) 空间曲线  $\Gamma$ :

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t),$$

的切向量为

$$\mathbf{l} = (\varphi'(t), \psi'(t), \omega'(t)),$$

曲线  $\Gamma$  的过点  $(\varphi(t_0), \psi(t_0), \omega(t_0))$  的切线方程为

$$\frac{x - \varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - \psi(t_0)}{\psi'(t_0)} = \frac{z - \omega(t_0)}{\omega'(t_0)}.$$

(3) 空间曲线  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  在交点处的交角.

设曲线  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  在交点处的切向量分别为  $\mathbf{l}_1$  与  $\mathbf{l}_2$ , 则  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  在交点处的交角为

$$\theta = \begin{cases} \langle \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \rangle, & 0 \leq \langle \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \rangle \leq \frac{\pi}{2}, \\ \pi - \langle \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \rangle, & \frac{\pi}{2} \leq \langle \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2 \rangle \leq \pi. \end{cases}$$

## 5.2 典型习题与试题解析

**例 5.1** 非零向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  满足什么条件时, 有

$$(1) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|; \quad (2) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|;$$

$$(3) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|; \quad (4) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|;$$

$$(5) |\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|.$$

**解析** (1) 当向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  方向相同时, 有  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ .

(2) 当向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  方向相反, 且  $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$  时, 有  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$ .

(3) 当向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  垂直时, 有  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ . 事实上, 以向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  为邻边作矩形, 则  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$  与  $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$  分别表示矩形的两条对角线的长.

(4) 当向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为锐角时, 有  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| > |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ . 事实上, 由余弦定理, 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为  $\theta, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ , 则

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta,$$

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\theta.$$

(5) 当向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  的夹角为钝角时, 有  $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| < |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ . (理由同(4))

**例 5.2** 已知  $\overrightarrow{OA} = (2, -3, 6), \overrightarrow{OB} = (-1, 2, -2)$ , 向量  $\overrightarrow{OC}$  位于向量  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{OB}$  的角平分线上, 且  $|\overrightarrow{OC}| = 3\sqrt{42}$ , 求向量  $\overrightarrow{OC}$  的坐标.

**解析**  $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 6^2} = 7,$

$$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$$

因  $\overrightarrow{OC}$  在  $\overrightarrow{OA}$  与  $\overrightarrow{OB}$  的角平分线上, 所以  $\overrightarrow{OC}$  与  $\frac{1}{7}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$  同方向,

于是



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OC} &= \lambda \left( \frac{1}{7} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{OB} \right) \\
 &= \lambda \left( \left( \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{6}{7} \right) + \left( -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right) \right) \\
 &= \lambda \left( -\frac{1}{21}, \frac{5}{21}, \frac{4}{21} \right),
 \end{aligned}$$

这里  $\lambda > 0$  为常数. 由于  $|\overrightarrow{OC}| = 3\sqrt{42}$ , 又

$$|\overrightarrow{OC}| = |\lambda| \sqrt{\left(\frac{-1}{21}\right)^2 + \left(\frac{5}{21}\right)^2 + \left(\frac{4}{21}\right)^2} = \frac{\lambda \sqrt{42}}{21},$$

由此可解得  $\lambda = 63$ , 于是  $\overrightarrow{OC}$  的坐标为

$$\overrightarrow{OC} = (-3, 15, 12).$$

**例 5.3** 设  $a, b, c$  都是单位向量, 且  $a + b + c = 0$ , 求  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a$ .

**解析**

因  $a + b + c = 0$ , 且  $a, b, c$  皆为单位向量, 所以  $a, b, c$  可构成边长为 1 的等边三角形, 且  $\langle a, b \rangle = \langle b, c \rangle = \langle c, a \rangle = \frac{2}{3}\pi$ , 于是

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \langle a, b \rangle = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$

$$b \cdot c = |b| |c| \cos \langle b, c \rangle = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$

$$c \cdot a = |c| |a| \cos \langle c, a \rangle = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2},$$

所以  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}$ .

**例 5.4** 已知  $|a| = 13$ ,  $|b| = 19$ ,  $|a + b| = 24$ , 求  $|a - b|$ .

**解析** 由于

$$|a + b|^2 = (a + b) \cdot (a + b) = |a|^2 + |b|^2 + 2a \cdot b,$$

所以

$$2a \cdot b = |a + b|^2 - |a|^2 - |b|^2 = 24^2 - 13^2 - 19^2,$$

又

$$\begin{aligned} |a-b|^2 &= (a-b) \cdot (a-b) = |a|^2 + |b|^2 - 2a \cdot b \\ &= 13^2 + 19^2 - (24^2 - 13^2 - 19^2) \\ &= 2(13^2 + 19^2) - 24^2 = 484, \end{aligned}$$

于是  $|a-b| = 22$ .

**例 5.5** 设  $a, b$  为非零常向量,  $|b| = 2, \langle a, b \rangle = \frac{\pi}{3}$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a+xb| - |a|}{x}.$$

**解析** 方法 I 因为

$$\begin{aligned} |a+xb| &= \sqrt{(a+xb) \cdot (a+xb)} \\ &= \sqrt{|a|^2 + x^2|b|^2 + 2x|a||b|\cos\langle a, b \rangle} \\ &= \sqrt{|a|^2 + 4x^2 + 2x|a|}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|a|^2 + 4x^2 + 2x|a|} - |a|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x + 2|a|}{\sqrt{|a|^2 + 4x^2 + 2x|a|} + |a|} \\ &= \frac{2|a|}{2|a|} = 1. \end{aligned}$$

**方法 II** 原式  $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a+xb|^2 - |a|^2}{(|a+xb| + |a|)x}$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+xb) \cdot (a+xb) - a \cdot a}{2|a|x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xa \cdot b + x^2b \cdot b}{2|a|x} = \frac{a \cdot b}{|a|} \\ &= |b| \cos \langle a, b \rangle = 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 1. \end{aligned}$$

**例 5.6** 若  $a \times b \cdot c = 2$ , 求  $(a+b) \cdot [(b+c) \times (c+a)]$ .

**解析** 应用数量积与向量积的运算性质得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) + \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \\ &\quad \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} + \mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = 2(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = 4.\end{aligned}$$

**例 5.7** 设  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  为普通几何空间的三个向量, 若存在不全为零的三个数  $k_1, k_2, k_3$  使得

$$k_1 \mathbf{a} \times \mathbf{b} + k_2 \mathbf{b} \times \mathbf{c} + k_3 \mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{0},$$

试证三向量  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  共线.

**解析** 不妨设  $k_1 \neq 0$ , 则

$$\begin{aligned}\mathbf{c} \cdot (k_1 \mathbf{a} \times \mathbf{b} + k_2 \mathbf{b} \times \mathbf{c} + k_3 \mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= k_1 [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] + k_2 [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{c}] + k_3 [\mathbf{c}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] \\ &= k_1 [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0,\end{aligned}$$

所以  $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ , 因此三向量  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  共面. 由此得  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b} \times \mathbf{c}, \mathbf{c} \times \mathbf{a}$  皆垂直于该平面, 因此它们共线.

**例 5.8** 已知三点  $A(1, 0, 2), B(2, 1, -1), C(0, 2, 1)$ , 求三角形  $ABC$  的面积.

**解析**  $\overrightarrow{CA} = (1, -2, 1), \overrightarrow{CB} = (2, -1, -2)$ , 于是三角形  $ABC$  的面积  $S$  为

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{CB}| = \frac{1}{2} |(5, 4, 3)| = \frac{1}{2} \sqrt{50}.$$

**例 5.9** 已知四点  $A(1, 0, 2), B(2, 1, -1), C(0, 2, 1), D(1, 1, -1)$ , 求四面体  $ABCD$  的体积.

**解析**  $\overrightarrow{CA} = (1, -2, 1), \overrightarrow{CB} = (2, -1, -2), \overrightarrow{CD} = (1, -1, -2)$ , 则

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}] &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -5,\end{aligned}$$

于是以  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}$  为棱的四面体体积为

$$V = \frac{1}{6} | [\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}] | = \frac{5}{6}.$$

**例 5.10** 设一平面经过原点及点  $(6, -3, 2)$ , 且与平面  $4x - y + 2z = 8$  垂直, 求此平面方程.

**解析** 记点  $(6, -3, 2)$  为  $P$ , 则  $\overrightarrow{OP} = (6, -3, 2)$ , 平面  $4x - y + 2z = 8$  的法向量为  $\mathbf{n}_1 = (4, -1, 2)$ , 设所求平面的法向量为  $\mathbf{n}$ , 则  $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{OP}, \mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1$ , 所以

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{OP} \times \mathbf{n}_1 = (6, -3, 2) \times (4, -1, 2) = -2(2, 2-3),$$

于是所求平面的方程为

$$2(x-0) + 2(y-0) - 3(z-0) = 0,$$

即  $2x + 2y - 3z = 0$ .

**例 5.11** 求与平面  $x - 2y + 4z = 2$  平行, 且距离为 3 的平面方程.

**解析** 设所求平面上动点的坐标为  $(x, y, z)$ , 由于点  $(x, y, z)$  到平面  $x - 2y + 4z - 2 = 0$  的距离为

$$d = \frac{|x - 2y + 4z - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2}} = 3,$$

化简即得所求平面方程为

$$x - 2y + 4z = 2 \pm 3\sqrt{21}.$$

**例 5.12** 求以直线  $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$  为对称轴, 半径等于 3 的圆柱面方程.

**解析** 直线  $L$  通过点  $P_0(1, 0, -1)$ , 其方向向量为  $\mathbf{l} = (2, -1, 1)$ , 在圆柱面任取点  $P(x, y, z)$ , 则点  $P$  到直线  $L$  的距离等于 3, 于是  $|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{l}| = 3|\mathbf{l}|$ , 由于  $|\mathbf{l}| = \sqrt{6}$ ,

$$|\overrightarrow{P_0P} \times \mathbf{l}| = \sqrt{(y+z+1)^2 + (x-2z-3)^2 + (x+2y-1)^2},$$

于是所求圆柱面方程为

$$(y+z+1)^2 + (x-2z-3)^2 + (x-2y-1)^2 = 54.$$

**例 5.13** 求经过两平面  $x+5y+z=0$  与  $x-z+4=0$  的交线, 且与平面  $x-4y-8z+12=0$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$  的平面方程.

**解析** 经过两平面的交线的平面束方程为

$$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0, \quad (1)$$

其法向量为  $\mathbf{n} = (1+\lambda, 5, 1-\lambda)$ , 平面  $x-4y-8z+12=0$  的法向量为  $\mathbf{n}_1 = (1, -4, -8)$ , 由于  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{n}_1 \rangle = \frac{\pi}{4}$ , 所以

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1}{|\mathbf{n}| |\mathbf{n}_1|} &= \frac{1+\lambda-20-8(1-\lambda)}{\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2} \cdot \sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}} \\ &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned} \quad (2)$$

化简得  $\lambda = -\frac{3}{4}$ , 代入(1)式即得所求平面方程为

$$x+20y+7z=12.$$

又在(2)式中, 令  $\lambda \rightarrow +\infty$ , 等式亦成立, 所以由(1)式令  $\lambda \rightarrow +\infty$  所得平面  $x-z+4=0$  也是所求的平面.

**例 5.14** 设矩阵  $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$  满秩, 判别直线

$$\frac{x-a_1}{a_2-a_3} = \frac{y-b_1}{b_2-b_3} = \frac{z-c_1}{c_2-c_3} \quad \text{与} \quad \frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$$

的相互关系.

**解析** 这是线性代数与空间解析几何的综合题.

记点  $P_1(a_1, b_1, c_1), P_2(a_2, b_2, c_2), P_3(a_3, b_3, c_3)$ , 记  $\overrightarrow{OP} = \mathbf{a}_1 = (a_1, b_1, c_1), \overrightarrow{OP}_2 = \mathbf{a}_2 = (a_2, b_2, c_2), \overrightarrow{OP}_3 = \mathbf{a}_3 = (a_3, b_3, c_3)$ , 由于矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$$

的秩 = 3, 所以向量组  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  线性无关, 于是三向量  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  不共面, 由此可得三点  $P_1, P_2, P_3$  不共线 (即三点不在同一直线上).

由于第一条直线过点  $P_1$ , 方向向量为  $\overrightarrow{P_3P_2}$ ; 第二条直线过点  $P_3$ , 方向向量为  $\overrightarrow{P_2P_1}$ . 这相当于从三角形  $P_1P_2P_3$  的两顶点  $P_1, P_3$  分别作其对边的平行线, 即为题给的两条直线, 故它们必相交于一点.

**评注** 题设矩阵满秩是三点  $P_1, P_2, P_3$  不共线的充分条件. 当三点  $P_1, P_2, P_3$  不共线, 但四点  $O, P_1, P_2, P_3$  共面时题设矩阵不满秩.

**例 5.15** 一镜面放在平面  $\Pi: 2x - y + 3z = 11$  上, 在镜面上方有两点  $A(1, 2, -1)$ ,  $B(-2, 1, 3)$ , 现从点  $A$  发射一束光线至镜面上点  $P$  处, 其反射光线通过点  $B$ , 试求点  $P$  的位置.

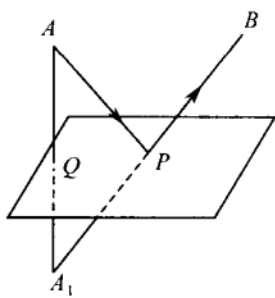


图 5.1

**解析** 设点  $A$  关于平面  $\Pi: 2x - y + 3z = 11$  的对称点为  $A_1$ , 联结  $A_1B$ , 直线  $A_1B$  与平面  $\Pi$  的交点  $P$  即为所求的点. 过  $A, A_1$  的直线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{3},$$

化为参数式得  $x = 1 + 2t, y = 2 - t, z = -1 + 3t$ , 代入平面  $\Pi$  的方程可解出  $t = 1$ , 于是直线  $AA_1$  与平面  $\Pi$  的交点  $Q$  的坐标为  $Q(3, 1, 2)$ , 因而点  $A_1$  的坐标为  $A_1(5, 0, 5)$ , 直线  $A_1B$  的方程为

$$\frac{x-5}{-2-5} = \frac{y-0}{1-0} = \frac{z-5}{3-5},$$

即  $x = 5 - 7t, y = t, z = 5 - 2t$ , 代入平面  $\Pi$  的方程得  $t = \frac{2}{3}$ , 于是

所求点  $P$  的坐标为  $P\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3}\right)$ .

**例 5.16** 求过点  $A(1, 2, 1)$  且与两直线

$$L_1: \begin{cases} x - 2y - z + 1 = 0, \\ x - y + z - 1 = 0, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} 2x - y + z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases}$$

都相交的直线方程.

**解析** **方法 I** 直线  $L_1$  过点  $P_1(0, 0, 1)$ , 方向向量为

$$l_1 = (1, -2, -1) \times (1, -1, 1) = (-3, -2, 1).$$

直线  $L_2$  过点  $O(0, 0, 0)$ , 方向向量为

$$l_2 = (2, -1, 1) \times (1, -1, -1) = (2, 3, -1).$$

设所求直线  $L$  的方向向量为  $l = (m, n, p)$ , 由于  $L$  与  $L_1$  相交, 故三向量  $l, l_1, \overrightarrow{AP_1}$  共面, 所以

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$2m - n + 4p = 0. \quad (1)$$

同理, 由  $L$  与  $L_2$  相交, 故三向量  $l, l_2, \overrightarrow{OA}$  共面, 所以

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$5m - 3n + p = 0. \quad (2)$$

联列(1), (2) 解得  $\frac{m}{11} = \frac{n}{18} = \frac{p}{-1}$ , 于是所求直线方程为

$$\frac{x-1}{11} = \frac{y-2}{18} = \frac{z-1}{-1}.$$

**方法 II** 通过直线  $L_1$  的平面束方程为

$$x - 2y - z + 1 + \lambda(x - y + z - 1) = 0,$$

将点  $A(1,2,1)$  的坐标代入上式得  $\lambda = -3$ , 于是过直线  $L_1$  和点  $A$  的平面方程为

$$2x - y + 4z - 4 = 0.$$

通过直线  $L_2$  的平面束方程为

$$2x - y + z + \mu(x - y - z) = 0,$$

将点  $A(1,2,1)$  的坐标代入得  $\mu = \frac{1}{2}$ , 于是过直线  $L_2$  和点  $A$  的平面方程为

$$5x - 3y + z = 0.$$

因而所求直线方程为

$$\begin{cases} 2x - y + 4z - 4 = 0, \\ 5x - 3y + z = 0. \end{cases}$$

**例 5.17** 求通过点  $(-1,0,4)$ , 且平行于平面  $3x - 4y + z - 10 = 0$ , 又与直线  $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$  相交的直线方程.

**解析** 方法 I 记点  $A$  为  $(-1,0,4)$ , 平面  $\Pi: 3x - 4y + z - 10 = 0$  的法向量为  $\mathbf{n} = (3, -4, 1)$ , 直线  $L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$  过点  $P(-1,3,0)$ , 方向向量为  $\mathbf{l} = (3, 1, 2)$ . 设所求直线  $L_1$  的方向向量为  $\mathbf{l}_1 = (m, n, p)$ , 则  $\mathbf{l}_1 \perp \mathbf{n}$ , 所以

$$3m - 4n + p = 0. \quad (1)$$

又由  $L_1$  与  $L$  相交, 所以三向量  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}, \overrightarrow{AP}$  共面, 故

$$\begin{vmatrix} m & n & p \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

即

$$-10m + 12n + 9p = 0. \quad (2)$$

联列(1), (2) 解得



$$\frac{m}{48} = \frac{n}{37} = \frac{p}{4},$$

于是所求直线的方程为

$$\frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}.$$

**方法 II** 过点  $A$  作平面  $\Pi_1$  平行于平面  $\Pi$ , 则  $\Pi_1$  的方程为

$$3(x+1) - 4(y-0) + (z-4) = 0,$$

即

$$3x - 4y + z - 1 = 0.$$

直线  $L$  的参数方程为  $x = -1 + 3t, y = 3 + t, z = 2t$ , 代入平面  $\Pi_1$  的方程得

$$3(-1 + 3t) - 4(3 + t) + (2t) - 1 = 0,$$

由此可解得  $t = \frac{16}{7}$ , 所以直线  $L$  与平面  $\Pi_1$  的交点为  $Q(\frac{41}{7}, \frac{37}{7}, \frac{32}{7})$ .

向量  $\overrightarrow{AQ} = (\frac{48}{7}, \frac{37}{7}, \frac{4}{7})$  即为所求直线  $L_1$  的方向向量, 于是所求直线方程为

$$\frac{x+1}{48} = \frac{y}{37} = \frac{z-4}{4}.$$

**方法 III** 过点  $A$  作平面  $\Pi_1$  平行于平面  $\Pi$ , 则  $\Pi_1$  的方程为

$$3x - 4y + z - 1 = 0. \quad (3)$$

直线  $L$  的一般式方程为

$$\begin{cases} 2x - 3z + 2 = 0, \\ 2y - z - 6 = 0, \end{cases}$$

过直线  $L$  的平面束方程为

$$2x - 3z + 2 + \lambda(2y - z - 6) = 0,$$

将点  $A$  的坐标  $(-1, 0, 4)$  代入解得  $\lambda = -\frac{6}{5}$ , 即得通过点  $A$  和直线  $L$  的平面方程为

$$10x - 12y - 9z + 46 = 0, \quad (4)$$

于是所求直线为(3)与(4)的交线,即

$$\begin{cases} 3x - 4y + z - 1 = 0, \\ 10x - 12y - 9z + 46 = 0. \end{cases}$$

**例 5.18** 求两条直线  $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$ ,  $L_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{0}$   
 $= \frac{z-2}{1}$  的公垂线的方程和公垂线的长.

**解析** 直线  $L_1$  过点  $P_1(3,0,0)$ , 方向向量为  $\boldsymbol{l}_1 = (2,4,3)$ , 直线  $L_2$  过点  $P_2(-1,3,2)$ , 方向向量为  $\boldsymbol{l}_2 = (2,0,1)$ . 则公垂线的方向向量为

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2 = (2,4,3) \times (2,0,1) = (4,4,-8) = 4(1,1,-2).$$

公垂线的长为

$$d = |\text{Prj}_{\boldsymbol{l}} \overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \boldsymbol{l}|}{|\boldsymbol{l}|} = \frac{|-20|}{4\sqrt{6}} = \frac{5}{6}\sqrt{6}.$$

将直线  $L_1$  与  $L_2$  写为参数式得

$$L_1: \begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 4t, \\ z = 3t, \end{cases} \quad L_2: \begin{cases} x = -1 + 2s, \\ y = 3, \\ z = 2 + s, \end{cases}$$

这里  $t, s$  为参数. 设公垂线与直线  $L_1, L_2$  的交点分别为  $M_1, M_2$ , 点  $M_1$  与  $M_2$  所对应的参数设为  $t_1, s_1$ , 则  $\overrightarrow{M_1M_2} \parallel \boldsymbol{l}$ , 于是

$$\frac{3 + 2t_1 + 1 - 2s_1}{1} = \frac{4t_1 - 3}{1} = \frac{3t_1 - 2 - s_1}{-2},$$

由此可解得  $t_1 = \frac{23}{24}, s_1 = \frac{61}{24}$ , 所以点  $M_1$  的坐标为  $M_1\left(\frac{59}{12}, \frac{23}{6}, \frac{23}{8}\right)$ ,

因而公垂线的方程为

$$\frac{x - \frac{59}{12}}{1} = \frac{y - \frac{23}{6}}{1} = \frac{z - \frac{23}{8}}{-2}.$$

**例 5.19** 求圆周  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y = 14, \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases}$  的圆心和半径.

径.

**解析** 题给圆周是球面  $\Sigma$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4^2$$

与平面  $2x - 2y + z = 1$  的交线. 球面的球心为点  $A(1, -1, 0)$ , 半径  $R = 4$ . 点  $A$  到平面  $2x - 2y + z = 1$  的距离为

$$d = \frac{|2 - 2(-1) + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{3} = 1,$$

于是题给圆周的半径为  $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{16 - 1} = \sqrt{15}$ .

平面  $\Pi: 2x - 2y + z = 1$  的法向量为  $\mathbf{n} = (2, -2, 1)$ . 过点  $A$ , 以  $\mathbf{n}$  为方向向量作直线  $L$ , 其参数方程为

$$x = 1 + 2t, y = -1 - 2t, z = t,$$

代入平面  $\Pi$  的方程得

$$2(1 + 2t) - 2(-1 - 2t) + t = 1,$$

故  $t = -\frac{1}{3}$ , 于是直线  $L$  与平面  $\Pi$  的交点为  $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ , 此即所求圆周的圆心坐标.

**例 5.20** 将直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1}$  绕  $z$  轴旋转一周, 求旋转曲面的方程. 并求此旋转曲面与  $z = 0, z = 3$  所围立体的体积.

**解析** 在空间任取点  $P(x, y, z)$ , 过点  $P$  作平面  $\Pi$  垂直于  $z$  轴, 设平面  $\Pi$  与  $z$  轴的交点为  $M$ , 则  $M$  的坐标为  $(0, 0, z)$ , 设平面  $\Pi$  与已知直线的交点为  $Q(x_0, y_0, z)$ , 则

$$\frac{x_0 - 1}{2} = \frac{y_0 - 2}{1} = \frac{z - 3}{-1}.$$

由于点  $P$  位于所求旋转曲面上的充要条件为  $|PM| = |QM|$ , 即

$$x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2.$$

将  $x_0 = 1 - 2(z - 3) = 7 - 2z$ ,  $y_0 = 2 - (z - 3) = 5 - z$  代入上式  
 消去  $x_0, y_0$ , 即得动点  $P$  的坐标  $(x, y, z)$  所满足的方程

$$x^2 + y^2 - 5z^2 + 38z = 74,$$

此即所求旋转曲面的方程.

由于点  $P$  到  $z$  轴的距离为

$$d = |PM| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{74 - 38z + 5z^2},$$

应用平行截面面积可求的立体体积公式即得

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^3 d^2 dz = \pi \int_0^3 (74 - 38z + 5z^2) dz \\ &= \pi \left( 74z - 19z^2 + \frac{5}{3}z^3 \right) \Big|_0^3 = 95\pi. \end{aligned}$$

**例 5.21** 已知空间曲线  $\Gamma$ :

$$\begin{cases} 6x^2 - y^2 - 3z^2 = 0, \\ \lambda x + y - z = 0, \end{cases}$$

问  $\lambda$  为何值时,  $\Gamma$  为: (1) 一点; (2) 一条直线; (3) 两条相异直线.

**解析** 方法 I 曲线  $\Gamma$  过原点, 考虑  $\Gamma$  在  $xy$  平面上的投影  $l$ :

$$\begin{cases} 4y^2 + 6\lambda xy + (3\lambda^2 - 6)x^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (1)$$

当  $x \neq 0$  时, 考察二次方程 (1) 的判别式

$$\Delta = 12(8 - \lambda^2)x^2,$$

(1) 当  $\Delta < 0$  即  $|\lambda| > 2\sqrt{2}$  时, (1) 对于  $y$  无解, 此时  $\Gamma$  为一点 (原点);

(2) 当  $\Delta = 0$ , 即  $|\lambda| = 2\sqrt{2}$  时, (1) 对  $y$  有一解, 此时  $\Gamma$  为一条直线;

(3) 当  $\Delta > 0$  即  $|\lambda| < 2\sqrt{2}$  时, (1) 对于  $y$  有两解, 此时  $\Gamma$  为两条相异直线.

**方法 II** 曲线  $\Gamma$  过原点. 当  $x \neq 0$  时, 考察  $\Gamma$  在  $xy$  平面上的投影

$$\begin{cases} \left(2y + \frac{3}{2}\lambda x\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\lambda^2 - 6\right)x^2 = 0, \\ z = 0, \end{cases} \quad (2)$$

(1) 当  $\frac{3}{4}\lambda^2 - 6 > 0$  即  $|\lambda| > 2\sqrt{2}$  时, (2) 对于  $y$  无解, 此时  $\Gamma$  为一点(原点);

(2) 当  $\frac{3}{4}\lambda^2 - 6 = 0$  即  $|\lambda| = 2\sqrt{2}$  时, (2) 对于  $y$  有一解

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}\lambda x, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{所以此时 } \Gamma \text{ 为一条直线;}$$

(3) 当  $\frac{3}{4}\lambda^2 - 6 < 0$  即  $|\lambda| < 2\sqrt{2}$  时, (2) 对于  $y$  有二解

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}\lambda x \pm \sqrt{6 - \frac{3}{4}\lambda^2}x, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{所以此时 } \Gamma \text{ 为两条相异直线.}$$

**方法Ⅲ** 曲线  $\Gamma$  过原点, 设其方程为

$$x = mt, \quad y = nt, \quad z = pt,$$

当  $t=0$  时为原点, 当  $t \neq 0$  时代入原方程得

$$\begin{cases} 6m^2 - n^2 - 3p^2 = 0, \\ \lambda m + n - p = 0, \end{cases} \quad (3)$$

若  $m=0$ , 代入(3)式得  $n=p$ ,  $n^2 = -3p^2$ , 此为矛盾式(因  $p \neq 0$ ). 所以  $m=0$  时(3)式无非零解;  $m \neq 0$  时, 不妨设  $m=1$ , 代入(3)式得

$$4n^2 + 6\lambda n + (3\lambda^2 - 6) = 0, \quad (4)$$

(1) 当  $\Delta = 12(8 - \lambda^2) < 0$  即  $|\lambda| > 2\sqrt{2}$  时, (4)式无解, 此时  $\Gamma$  为一点(即原点);

(2) 当  $\Delta = 12(8 - \lambda^2) = 0$  即  $|\lambda| = 2\sqrt{2}$  时, (4)式有一解,

$$(m, n, p) = \left(1, -\frac{3}{4}\lambda, \frac{1}{4}\lambda\right),$$

此时  $\Gamma$  为一条直线;

(3) 当  $\Delta = 12(8 - \lambda^2) > 0$  即  $|\lambda| < 2\sqrt{2}$  时, (4) 式有两解,

$$(m, n, p) = \left( 1, -\frac{3}{4}\lambda \pm \frac{1}{4}\sqrt{3(8 - \lambda^2)}, \frac{1}{4}\lambda \pm \sqrt{3(8 - \lambda^2)} \right),$$

此时  $\Gamma$  为两条相异直线.

**例 5.22** 求椭球面  $\Sigma: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$  的切平面, 使其分别

(1) 平行于平面  $\Pi: x - 2y + 3z - 8 = 0$ ;

(2) 通过直线  $L: \begin{cases} 2x - y + z - 7 = 0, \\ y + z - 1 = 0. \end{cases}$

**解析** (1) 记切点为  $M(x_0, y_0, z_0)$ ,  $F = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6$ , 则曲面  $\Sigma$  在点  $M$  的法向量为

$$\mathbf{n} = (F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_M = (2x_0, 4y_0, 6z_0).$$

平面  $\Pi: x - 2y + 3z - 8 = 0$  的法向量为  $\mathbf{n}_1 = (1, -2, 3)$ , 由于所求的切平面与平面  $\Pi$  平行, 所以  $\mathbf{n} // \mathbf{n}_1$ , 故

$$\frac{2x_0}{1} = \frac{4y_0}{-2} = \frac{6z_0}{3} = 2t,$$

即  $x_0 = t, y_0 = -t, z_0 = t$ , 代入椭球面方程得  $t = \pm 1$ , 由此得切点为  $(1, -1, 1)$  与  $(-1, 1, -1)$ , 于是所求的切平面为

$$1 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 1) + 3 \cdot (z - 1) = 0$$

或

$$1 \cdot (x + 1) - 2 \cdot (y - 1) + 3 \cdot (z + 1) = 0.$$

化简得

$$x - 2y + 3z - 6 = 0 \quad \text{或} \quad x - 2y + 3z + 6 = 0.$$

(2) 已知直线  $L$  的方向向量为

$$\mathbf{l} = (2, -1, 1) \times (0, 1, 1) = (-2, -2, 2),$$

又易于在  $L$  上求一点  $P(3, 0, 1)$ , 则曲面  $\Sigma$  在切点  $M(x_0, y_0, z_0)$  的法向量  $\mathbf{n} = (2x_0, 4y_0, 6z_0)$  应满足  $\mathbf{n} \perp \mathbf{l}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{PM}$ . 所以

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l} = 0 \Rightarrow x_0 + 2y_0 - 3z_0 = 0,$$

$$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{PM} = 0 \Rightarrow x_0(x_0 - 3) + 2y_0(y_0 - 0) + 3z_0(z_0 - 1) = 0,$$

又  $x_0^2 + 2y_0^2 + 3z_0^2 = 6$ , 可解得  $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 1$ , 或  $x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 0$ . 于是所求平面过点  $(1, 1, 1)$  或  $(2, -1, 0)$ , 其法向量分别为  $(1, 2, 3)$  或  $(1, -1, 0)$ . 因而所求平面的方程为

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

或

$$x - y - 3 = 0.$$



# 6

## 多元函数微分学

### 6.1 基本概念与内容提要

#### 1) 多元函数基本概念

设  $D \subseteq \mathbf{R}^n$ , 则称映射

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}$$

为定义在  $D$  上的  $n$  元函数, 称  $D$  为  $f$  的定义域, 记为  $D(f)$ , 全体函数值  $f(x)$  的集合称为  $f$  的值域.

#### 2) 二元函数的极限

设函数  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  的某去心邻域内有定义, 若  $\exists A \in \mathbf{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 当  $0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta$  时恒有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon,$$

则称函数  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  有有限极限  $A$ , 记为

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = A.$$

#### 3) 二元函数的连续性

设函数  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  的某邻域内有定义, 若

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow b}} f(x, y) = f(a, b),$$

则称  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  连续. 若函数  $f(x, y)$  在平面域  $G$  上每一点连续, 称  $f$  在域  $G$  上连续.

#### 4) 有界闭域上的连续函数的性质

(1) 有界定理 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $G$  上连续, 则  $\exists K >$



0, 使得

$$|f(x, y)| \leq K, \forall (x, y) \in G.$$

(2) **最值定理** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $G$  上连续, 则  $\exists (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G$ , 使得

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2), \forall (x, y) \in G.$$

(3) **介值定理** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $G$  上连续,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G, f(x_1, y_1) < f(x_2, y_2)$ , 则  $\forall \mu \in (f(x_1, y_1), f(x_2, y_2))$ ,  $\exists (\xi, \eta) \in G$ , 使得  $f(\xi, \eta) = \mu$ .

(4) **零点定理** 若函数  $f(x, y)$  在有界闭域  $G$  上连续,  $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G, f(x_1, y_1) \cdot f(x_2, y_2) < 0$ , 则  $\exists (\xi, \eta) \in G$ , 使得  $f(\xi, \eta) = 0$ .

### 5) 偏导数的基本概念

设函数  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  的某邻域内定义, 则  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  关于  $x$  的偏导数定义为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(a, b)} &= f'_x(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(a + \square, b) - f(a, b)}{\square} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}, \end{aligned}$$

这里右端有有限极限. 同样,  $f(x, y)$  在  $(a, b)$  关于  $y$  的偏导数定义为

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(a, b)} &= f'_y(a, b) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\square \rightarrow 0} \frac{f(a, b + \square) - f(a, b)}{\square} \\ &= \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}, \end{aligned}$$

这里右端有有限极限.

在几何上,  $f'_x(a, b)$  表示曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = b \end{cases}$  在  $(a, b)$  的切线对  $x$

轴的斜率;  $f'_y(a, b)$  表示曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ x = a \end{cases}$  在  $(a, b)$  的切线对  $y$  轴的斜率.

### 6) \* 全微分的基本概念

设函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  的某邻域内定义, 若函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  的全增量

$$\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta f(x, y) = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

( $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ ), 则称  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  可微.

当函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  可微时,  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  一定可偏导, 且  $A(x, y) = f'_x(x, y)$ ,  $B(x, y) = f'_y(x, y)$ .

当函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  可微时, 称

$$df(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

为  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  的全微分.

### 7) 连续, 可偏导, 可微与连续可微的关系

当  $f'_x(x, y), f'_y(x, y)$  在  $(x, y)$  连续时, 称  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  连续可微.

函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  连续可微是  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  可微的充分条件.

当函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  可微时,  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  处必连续, 且可偏导.

二元函数  $f(x, y)$  在  $(x, y)$  处连续与可偏导这两个概念之间没有因果关系.

### 8) \* 多元复合函数的偏导数

设  $z = f(u, v)$  在  $(u, v)$  处可微,  $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$  在  $(x, y)$  处可偏导, 则  $z(x, y) = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$  在  $(x, y)$  处可偏导, 且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\varphi'_x(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}\psi'_x(x, y),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial u}\varphi'_y(x, y) + \frac{\partial f}{\partial v}\psi'_y(x, y).$$

由于多元复合函数的情况很多,下面再列举几个求偏导的公式,其可偏导的条件略去:

(1)  $z=z(x,y)=f(x,y,u,v), u=\varphi(x,y), v=\psi(x,y)$ , 则

$$\frac{\partial}{\partial x} z(x,y) = f'_x + f'_u \cdot \varphi'_x + f'_v \cdot \psi'_x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} z(x,y) = f'_y + f'_u \cdot \varphi'_y + f'_v \cdot \psi'_y,$$

(2)  $z=z(x)=f(x,u,v), u=\varphi(x), v=\psi(x)$ , 则

$$\frac{d}{dx} z(x) = f'_x + f'_u \cdot \varphi'(x) + f'_v \cdot \psi'(x),$$

这里左端的导数称为全导数.

### 9) \* 高阶偏导数(主要是二阶)

当  $f(x,y)$  的偏导数  $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$  作为  $(x,y)$  的函数仍可偏导时,有四个二阶偏导数

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y).$$

当二阶混合偏导数  $f''_{xy}(x,y)$  与  $f''_{yx}(x,y)$  在  $(x,y)$  处皆连续时,则它们与求偏导的次序无关,即  $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ .

### 10) 隐函数的偏导数

(1) 假设  $F(x,y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某邻域内连续可微,  $F(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ , 则存在  $x_0$  的邻域  $U$ , 和惟一的函数  $y=f(x), x \in U$ , 使得  $F(x, f(x)) \equiv 0, y_0 = f(x_0)$ , 且  $f(x)$  在  $x_0$  可导,

$$f'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)}.$$

(2) 假设  $F(x,y,z)$  在  $(x_0, y_0, z_0)$  的某邻域内连续可微,  $F(x_0, y_0, z_0) = 0, F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ , 则存在  $(x_0, y_0)$  的某邻域  $U$  和惟一的函数  $z=f(x,y), (x,y) \in U$ , 使得  $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0, z_0 = f(x_0, y_0)$ .

$y_0$ ), 且  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  可偏导,

$$f'_x(x_0, y_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0, z_0)}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

### 11) 二元函数极值的基本概念

可偏导的函数  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  取极值的必要条件是

$$f'_x(x_0, y_0) = 0, \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

并称  $(x_0, y_0)$  为函数  $f(x, y)$  的驻点.

### 12) \* 二元函数极值的充分条件

设  $(x_0, y_0)$  是函数  $f(x, y)$  的驻点,  $f(x, y)$  在  $(x_0, y_0)$  的某邻域内二阶偏导数皆连续, 令

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0, y_0),$$

则有:

- (1) 当  $B^2 - AC < 0, A > 0$  时  $f(x_0, y_0)$  为极小值;
- (2) 当  $B^2 - AC < 0, A < 0$  时  $f(x_0, y_0)$  为极大值;
- (3) 当  $B^2 - AC > 0$  时  $f(x_0, y_0)$  不是极值.

### 13) 函数的最值

设函数  $f$  在有界闭域  $G$  上连续, 则  $f$  在  $G$  有最大值与最小值. 进一步设  $f$  在  $G$  上可微, 则  $f$  的最值只可能在  $f$  的驻点处, 或在  $G$  的边界上取得. 所以, 只要求出函数  $f$  在  $G$  的内部的驻点和  $G$  的边界上的可能的极值点, 求出函数  $f$  在这些点的函数值, 比较它们的大小, 其中最大者为函数  $f$  在  $G$  上的最大值, 最小者为函数  $f$  在  $G$  上的最小值.

### 14) \* 条件极值

求函数  $u = f(x, y, z)$  满足约束方程  $\varphi(x, y, z) = 0$  的极值称为条件极值. 拉格朗日乘数法是解决条件极值问题的有效方法, 其步骤为:

(1) 构造拉格朗日函数

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z).$$

(2) 求函数  $F(x, y, z, \lambda)$  的驻点, 即方程组

$$\begin{cases} F'_x = f'_x(x, y, z) + \lambda \varphi'_x(x, y, z) = 0, \\ F'_y = f'_y(x, y, z) + \lambda \varphi'_y(x, y, z) = 0, \\ F'_z = f'_z(x, y, z) + \lambda \varphi'_z(x, y, z) = 0, \\ F'_\lambda = \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

的解, 记为  $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ .

(3) 根据问题的物理或几何意义说明条件极值的存在性. 若驻点又是惟一的(或惟二), 则  $f(x_0, y_0, z_0)$  即为所求的条件极值(极大或极小值).

## 6.2 典型习题与试题解析

例 6.1 求下列极限:

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x+y}; \quad (2) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

解析 (1) 因  $0 \leq \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x+y} \leq \left( \frac{1}{2} \right)^{x+y}$ , 当  $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$

时  $\left( \frac{1}{2} \right)^{x+y} \rightarrow 0$ , 由夹逼准则得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left( \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x+y} = 0.$$

$$(2) \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 0}} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{x^2}{x+y}} = \left[ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} \right]^{\frac{-x}{x+y}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

例 6.2 求极限  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{\arcsin(xy)}$ .

解析

$$\text{原式} = \exp \left( \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \arcsin(xy) \ln(x^2 + y^2) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left( \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\arcsin(xy)}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right) \\
 &= \exp \left( \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) \right).
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) &= \lim_{u \rightarrow 0} u \ln u \\
 &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} = 0, \\
 \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \right| &\leq \frac{1}{2},
 \end{aligned}$$

所以, 原式  $= e^0 = 1$ .

**例 6.3** 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

当  $(x, y)$  沿过原点的任一直线趋向于  $(0, 0)$  时, 求  $f(x, y)$  的极限. 并讨论  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的连续性.

**解析** 沿着  $y$  轴,  $y \rightarrow 0$  时

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^4} = 0;$$

沿着直线  $y = kx$ ,  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时,

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^3}{x^2 + k^4 x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x}{1 + k^4 x^2} = 0.$$

所以沿过原点的任一直线,  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时  $f(x, y) \rightarrow 0$ . 但是沿抛物线  $x = y^2$ ,  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时

$$\lim_{\substack{x=y^2 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

故当  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  时, 函数  $f(x, y)$  的极限不存在, 故  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处不连续.

**例 6.4** 证明函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

在  $(0, 0)$  处连续, 偏导数  $f'_x(0, 0), f'_y(0, 0)$  存在, 但  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  不可微.

**解析** 记  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ , 则  $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0 \Leftrightarrow \rho \rightarrow 0$ .

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \cos \theta \sin \theta = 0.$$

且  $f(0, 0) = 0$ , 所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  连续;

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0,$$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0,$$

即偏导数  $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ ; 因为  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  的全增量

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

记

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \omega \\ &= f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \omega = \omega, \end{aligned}$$

则

$$\omega = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

由于

$$\frac{\omega}{\rho} = \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho^2} = \cos \theta \sin \theta \not\rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0),$$

所以  $\omega \neq o(\rho)$ , 于是  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  不可微.

**例 6.5** 设

$$f(x, y) = \begin{cases} (x-y)\arctan \frac{1}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

求证: (1)  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  可微;

(2)  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  连续可微.

**解析** (1) 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( -\arctan \frac{1}{y^2} \right) = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

函数  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  的全增量为

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) = (x-y)\arctan \frac{1}{x^2+y^2},$$

记

$$\begin{aligned} \Delta f(x, y) &= f'_x(0, 0)\Delta x + f'_y(0, 0)\Delta y + \omega \\ &= f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y + \omega \\ &= \frac{\pi}{2}(x-y) + \omega, \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\rho} &= \frac{1}{\rho}(x-y)\left(\arctan \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= (\cos \theta - \sin \theta) \cdot \left(\arctan \frac{1}{\rho^2} - \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow 0 \quad (\rho \rightarrow 0), \end{aligned}$$

所以  $\omega = o(\rho)$ , 于是  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微.

(2) 当  $(x, y) \neq (0, 0)$  时,

$$f'_x(x, y) = \arctan \frac{1}{x^2+y^2} + (x-y) \frac{-2x}{1+(x^2+y^2)^2},$$



$$f'_y(x, y) = -\arctan \frac{1}{x^2 + y^2} + (x - y) \frac{-2y}{1 + (x^2 + y^2)^2},$$

由于

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_x(x, y) = \frac{\pi}{2} = f'_x(0, 0),$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f'_y(x, y) = -\frac{\pi}{2} = f'_y(0, 0),$$

所以  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处连续可微.

**例 6.6** 设函数  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  的附近有定义, 且  $f'_x(0, 0) = 3, f'_y(0, 0) = 1$ , 则( ).

(A)  $dz \Big|_{(0,0)} = 3dx + dy$

(B) 曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的法向量为  $(3, 1, -1)$

(C) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0, \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的切向量为  $(1, 0, 3)$

(D) 曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0, \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的切向量为  $(3, 0, 1)$

**解析** 函数  $f(x, y)$  只在  $(0, 0)$  附近有定义, 在  $(0, 0)$  处偏导数存在, 由此不能得到  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  可微, 其全微分  $dz$  也就不一定可求, 仅当  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微时, (A) 才成立.

曲面  $z = f(x, y)$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$  的切平面存在时, 其法向量应为

$$\mathbf{n} = (3, 1, -1),$$

这里, 由已知条件得不出切平面存在. 故 (B) 不成立.

由于  $f'_x(0, 0)$  存在, 所以曲线  $\begin{cases} z = f(x, y), \\ y = 0, \end{cases}$  在点  $(0, 0, f(0, 0))$

的切线存在, 其切向量为

$$\mathbf{l} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (3, 1, -1) \times (0, 1, 0)$$

$$=(1,0,3),$$

故(C)成立,(D)不成立.

**例 6.7** 设  $z=x^3e^y+(x-2)\arctan \frac{y}{x}$ , 求  $z'_x(2,0), z'_y(2,0)$ .

$$\text{解析} \quad z'_x(2,0)=(z(x,0))' \Big|_{x=2} = (x^3)' \Big|_{x=2} = 12,$$

$$z'_y(2,0)=(z(2,y))' \Big|_{y=0} = (8e^y)' \Big|_{y=0} = 8.$$

**例 6.8** 设  $z=xy+ye^{\frac{x}{y}}$ , 求证:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

$$\text{解析} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = y + ye^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = y + e^{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x + e^{\frac{x}{y}} + ye^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = x + e^{\frac{x}{y}} \left(1 - \frac{x}{y}\right),$$

于是

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} &= x(y + e^{\frac{x}{y}}) + y\left(x + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\right) \\ &= 2xy + e^{\frac{x}{y}}(x + y - x) \\ &= 2xy + ye^{\frac{x}{y}} = xy + z. \end{aligned}$$

**例 6.9** 设  $z = (3x-2y)^{2x-3y}$ , 试求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

**解析** 应用取对数求导法则,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z(\ln z)'_x = z \frac{\partial}{\partial x} (2x-3y) \ln(3x-2y)$$

$$= z \left( 2 \ln(3x-2y) + \frac{3(2x-3y)}{3x-2y} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z(\ln z)'_y = z \frac{\partial}{\partial y} (2x-3y) \ln(3x-2y)$$

$$= z \left( -3 \ln(3x-2y) - \frac{2(2x-3y)}{3x-2y} \right).$$

**例 6.10** 求函数  $z = (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}}$  的全微分.

**解析** 
$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2xe^{-\arctan \frac{x}{y}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}} \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \\ &= (2x - y)e^{-\arctan \frac{x}{y}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2ye^{-\arctan \frac{x}{y}} + (x^2 + y^2)e^{-\arctan \frac{x}{y}} \frac{-1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \\ &= (2y + x)e^{-\arctan \frac{x}{y}}, \end{aligned}$$

于是

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = e^{-\arctan \frac{x}{y}} ((2x - y)dx + (x + 2y)dy).$$

**例 6.11** 设  $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$ , 试求  $du(1, 1, 1)$ .

**解析** 因为  $u = y^{-\frac{1}{z}} x^{\frac{1}{z}}$ , 所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{-\frac{1}{z}} \frac{1}{z} x^{\frac{1}{z}-1} = \frac{1}{xz} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}.$$

因为  $u = x^{\frac{1}{z}} y^{-\frac{1}{z}}$ , 所以

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^{\frac{1}{z}} \left(-\frac{1}{z}\right) y^{-\frac{1}{z}-1} = -\frac{1}{yz} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}.$$

因为  $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$ , 所以

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}} \ln \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{1}{z^2}\right).$$

在点  $(1, 1, 1)$  处,  $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} = 1$ ,  $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} = -1$ ,  $\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} = 0$ , 于是

$$du(1, 1, 1) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)} dx + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(1,1,1)} dy + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(1,1,1)} dz = dx - dy.$$

**例 6.12** 已知函数  $z = f(x, y)$  的全微分为

$$dz = (e^x y + \sin y)dx + (e^x + x \cos y + y)dy,$$

求  $f(x, y)$ .

**解析** 因为  $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$ , 所以

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x y + \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^x + x \cos y + y,$$

将  $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x y + \sin y$  两边对  $x$  求积分得

$$z = e^x y + x \sin y + \varphi(y),$$

这里  $\varphi(y)$  为待定可导函数. 将此式代入  $\frac{\partial z}{\partial y} = e^x + x \cos y + y$ , 即得

$\varphi'(y) = y$ . 积分可得  $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + C$ . 于是

$$f(x, y) = e^x y + x \sin y + \frac{y^2}{2} + C.$$

**例 6.13** 设函数  $z = f(x, y)$  在点  $(1, 1)$  处可微, 且  $f(1, 1) = 1$ ,

$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(1,1)} = 2, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(1,1)} = 3, \varphi(x) = f(x, f(x, x))$ . 求  $\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1}$ .

**解析**  $\varphi(1) = f(1, f(1, 1)) = f(1, 1) = 1$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \varphi^3(x) &= 3\varphi^2(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) \\ &= 3\varphi^2(x) \frac{d}{dx} f(x, f(x, x)) \\ &= 3\varphi^2(x) [f'_1(x, f(x, x)) + \\ &\quad f'_2(x, f(x, x))(f'_1(x, x) + f'_2(x, x))]. \end{aligned}$$

取  $x = 1$ , 由于  $f'_1(1, 1) = f'_x(1, 1) = 2, f'_2(1, 1) = f'_y(1, 1) = 3$ , 故

$$\left. \frac{d}{dx} \varphi^3(x) \right|_{x=1} = 3\varphi^2(1) [f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1) \cdot (f'_1(1, 1) + f'_2(1, 1))]$$

$$\begin{aligned}
 &= 3 \cdot (2 + 3 \cdot (2 + 3)) \\
 &= 51.
 \end{aligned}$$

**例 6.14** 设  $x^2 + y^2 + z^2 = xf\left(\frac{z}{y}\right)$ ,  $f$  连续可导, 试求  $dz$ .

**解析** 原式两边分别对  $x, y$  求偏导得

$$\begin{aligned}
 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} &= f + xf' \cdot \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}, \\
 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} &= xf' \cdot \left(-\frac{1}{y^2}z + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}\right),
 \end{aligned}$$

由此可解出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(2x - f)}{xf' - 2yz}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y^3 + xzf'}{y(xf' - 2yz)},$$

于是

$$dz = \frac{y(2x - f)}{xf' - 2yz} dx + \frac{2y^3 + xzf'}{y(xf' - 2yz)} dy.$$

**例 6.15** 设  $z = z(x, y)$  由方程

$$F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$$

确定, 这里  $F$  可微, 试计算  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$ , 并说明此式与  $F$  无关.

**解析** 记  $f(x, y, z) = F\left(x + \frac{z}{y}, y + \frac{z}{x}\right) = 0$ , 应用隐函数与复合函数求偏导数公式得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{f'_x}{f'_z} = -\frac{F'_1 + F'_2 \cdot \left(-\frac{z}{x^2}\right)}{\frac{1}{y}F'_1 + \frac{1}{x}F'_2} = \frac{y(zF'_2 - x^2F'_1)}{x(xF'_1 + yF'_2)}, \\
 \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{f'_y}{f'_z} = -\frac{F'_1 \cdot \left(-\frac{z}{y^2}\right) + F'_2}{\frac{1}{y}F'_1 + \frac{1}{x}F'_2} = \frac{x(zF'_1 - y^2F'_2)}{y(xF'_1 + yF'_2)},
 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z &= \frac{y(zF'_2 - x^2F'_1)}{xF'_1 + yF'_2} + \frac{x(zF'_1 - y^2F'_2)}{xF'_1 + yF'_2} - z \\ &= \frac{(z-xy)(xF'_1 + yF'_2)}{xF'_1 + yF'_2} - z = -xy, \end{aligned}$$

此式右端为 $-xy$ , 确与 $F$ 无关.

**例 6.16** 设  $f(x, x+y, x+y+z)=0$ ,  $f$  连续可微,  $f'_3 \neq 0$ , 试求  $dz$ .

**解析** 记  $F(x, y, z) = f(x, x+y, x+y+z) = 0$ , 应用隐函数与复合函数求偏导数公式得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{f'_1 + f'_2 + f'_3}{f'_3}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{f'_2 + f'_3}{f'_3}, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= -\frac{1}{f'_3} [(f'_1 + f'_2 + f'_3) dx + (f'_2 + f'_3) dy]. \end{aligned}$$

**例 6.17** 设  $u = f(x, y, z)$ ,  $\varphi(x^2, e^y, z) = 0$ ,  $y = \sin x$ , 其中  $f, \varphi$  都具有二阶连续偏导数, 且  $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$ . 求全导数  $\frac{du}{dx}$ .

**解析** 由于  $y = \sin x$ , 则  $z = z(x)$  是由  $\varphi(x^2, e^{\sin x}, z) = 0$  确定的函数, 所以

$$\frac{dy}{dx} = \cos x, \quad \frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + \cos x \cdot e^{\sin x} \varphi'_2),$$

应用多元复合函数求全导数公式得

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} + f'_z \cdot \frac{dz}{dx} \\ &= f'_x + \cos x \cdot f'_y - \frac{1}{\varphi'_3} (2x\varphi'_1 + \cos x \cdot e^{\sin x} \varphi'_2) f'_z. \end{aligned}$$

**例 6.18** 设  $u = f(x, y, z)$  有连续的一阶偏导数, 函数  $y = y(x), z = z(x)$  分别由下列两式确定:

$$e^{xy} - xy = 2, \quad e^x = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt,$$

求全导数  $\frac{du}{dx}$ .

**解析** 应用复合函数求全导数公式得

$$\frac{du}{dx} = f'_x + f'_y \cdot \frac{dy}{dx} + f'_z \cdot \frac{dz}{dx}. \quad (1)$$

下面分别求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ . 记

$$F = e^{xy} - xy - 2, \quad G = \int_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} dt - e^x,$$

则由隐函数求导法则得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{ye^{xy} - y}{xe^{xy} - x} = -\frac{y}{x}, \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{G'_x}{G'_z} = -\frac{\frac{\sin(x-z)}{x-z} - e^x}{-\frac{\sin(x-z)}{x-z}} = 1 - \frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)}, \end{aligned}$$

代入(1)式得

$$\frac{du}{dx} = f'_x - \frac{y}{x} f'_y + \left(1 - \frac{(x-z)e^x}{\sin(x-z)}\right) f'_z.$$

**例 6.19** 设函数  $F(u, v)$  可微, 求证曲面

$$F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$$

上任一点的切平面通过一定点.

**解析** 记  $f(x, y, z) = F\left(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}\right) = 0$ , 则曲面上任一点  $P(x, y, z)$  处的法向量为

$$\mathbf{n} = (f'_x, f'_y, f'_z)$$

$$= \left( \frac{1}{z-c} F'_1, \frac{1}{z-c} F'_2, -\frac{x-a}{(z-c)^2} F'_1 - \frac{y-b}{(z-c)^2} F'_2 \right),$$

于是曲面在点  $P$  的切平面方程为

$$\frac{F'_1}{z-c}(X-x) + \frac{F'_2}{z-c}(Y-y) - \frac{(x-a)F'_1 + (y-b)F'_2}{(z-c)^2}(Z-z) = 0,$$

这里  $(X, Y, Z)$  为切平面上动点的坐标, 取  $X=a, Y=b, Z=c$  代入上式得

$$\begin{aligned} & \frac{F'_1}{z-c}(a-x) + \frac{F'_2}{z-c}(b-y) - \frac{(x-a)F'_1 + (y-b)F'_2}{(z-c)^2}(c-z) \\ &= \frac{a-x}{z-c}F'_1 + \frac{x-a}{z-c}F'_1 + \frac{b-y}{z-c}F'_2 + \frac{y-b}{z-c}F'_2 \equiv 0, \end{aligned}$$

所以曲面在任一点  $P$  的切平面通过定点  $(a, b, c)$ .

**评注** 曲面上任一点的切平面通过定点时, 该曲面是以该定点为顶点的锥面.

**例 6.20** 设  $f''_{xx}(x, y) = 1, f'_x(0, y) = y, f(0, y) = y^2$ , 求  $f(x, y)$ .

**解析** 将  $f''_{xx}(x, y) = 1$  两边对  $x$  积分得

$$f'_x(x, y) = x + \varphi(y),$$

这里  $\varphi(y)$  为待定连续函数. 令  $x=0$ , 由  $f'_x(0, y) = y$  可得  $\varphi(y) = y$ , 于是  $f'_x(x, y) = x + y$ . 此式两边再对  $x$  积分得

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + \psi(y),$$

这里  $\psi(y)$  为待定函数. 令  $x=0$ , 由  $f(0, y) = y^2$  可得  $\psi(y) = y^2$ . 于是

$$f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2.$$

**例 6.21** 设  $u = e^{-x} \sin \frac{x}{y}$ , 求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$  在点  $(2, \frac{1}{\pi})$  处的值.

**解析**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-x} \sin \frac{x}{y} + e^{-x} \frac{1}{y} \cos \frac{x}{y},$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= e^{-x} \frac{x}{y^2} \cos \frac{x}{y} - e^{-x} \frac{1}{y^2} \cos \frac{x}{y} + e^{-x} \frac{1}{y} \frac{x}{y^2} \sin \frac{x}{y} \\ &= e^{-x} \frac{1}{y^2} \left( x \cos \frac{x}{y} - \cos \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \sin \frac{x}{y} \right),\end{aligned}$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \left( 2, \frac{1}{\pi} \right) = e^{-2} \pi^2 (2 - 1 + 0) = \left( \frac{\pi}{e} \right)^2.$$

**例 6.22** 设  $f(x, y) = \int_0^{xy} e^{-t^2} dt$ , 试求:

$$\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

**解析** 应用变上限积分求导公式得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{-(xy)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{-(xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = ye^{-(xy)^2} \cdot (-2xy^2) = -2xy^3 e^{-(xy)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{-(xy)^2} + ye^{-(xy)^2} \cdot (-2x^2 y) = e^{-(xy)^2} (1 - 2x^2 y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^{-(xy)^2} \cdot (-2x^2 y) = -2x^3 ye^{-(xy)^2},$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ = -2x^2 y^2 e^{-(xy)^2} - 2e^{-(xy)^2} (1 - 2x^2 y^2) - 2x^2 y^2 e^{-(xy)^2} \\ = -2e^{-(xy)^2}.\end{aligned}$$

**例 6.23** 设  $z = f\left(e^y \arctan \frac{1}{x}, x^2 - y^2\right)$ ,  $f$  具有二阶连续偏导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**解析**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \left( -\frac{1}{x^2} \right) f'_1 + 2xf'_2$$

$$\begin{aligned}
&= -e^y \frac{1}{1+x^2} f'_1 + 2x f'_2, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -e^y \frac{1}{1+x^2} f'_1 - \\
&\quad e^y \frac{1}{1+x^2} \left( e^y \arctan \frac{1}{x} \cdot f''_{11} + (-2y) f''_{12} \right) + \\
&\quad 2x \left( e^y \arctan \frac{1}{x} \cdot f''_{21} + (-2y) f''_{22} \right) \\
&= \frac{-1}{1+x^2} e^y f'_1 - \frac{1}{1+x^2} \arctan \frac{1}{x} \cdot e^{2y} f''_{11} + \\
&\quad e^y \left( \frac{2y}{1+x^2} - 2x \arctan \frac{1}{x} \right) f''_{12} - 4xy f''_{22}.
\end{aligned}$$

**例 6.24** 设  $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$ , 其中  $f$  具有二阶连续偏导数,  $g$  具有二阶连续导数, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**解析** 这里  $f$  是二元函数,  $g$  为一元函数, 且经复合而成为  $x, y$  的二元函数.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= y f'_1 + \frac{1}{y} f'_2 - \frac{y}{x^2} g', \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f'_1 + y(x f''_{11} - \frac{x}{y^2} f''_{12}) - \frac{1}{y^2} f'_2 + \\
&\quad \frac{1}{y} (x f''_{21} - \frac{x}{y^2} f''_{22}) - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g'' \\
&= f'_1 - \frac{1}{y^2} f'_2 + xy f''_{11} - \frac{y}{x^3} f''_{22} - \frac{1}{x^2} g' - \frac{y}{x^3} g''.
\end{aligned}$$

**例 6.25** 设  $z = \frac{1}{x} f(xy) + y\varphi(x+y)$ ,  $f, \varphi$  具有二阶连续导数, 则  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**解析** 注意到  $f, \varphi$  皆为一元函数(复合函数), 但中间变量皆为

$x, y$  的二元函数,

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{x^2}f(xy) + \frac{1}{x}f'(xy)y + y\varphi'(x+y), \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{x^2}f'(xy)x + \frac{1}{x}f''(xy)xy + \frac{1}{x}f'(xy) + \\ &\quad \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y) \\ &= yf''(xy) + \varphi'(x+y) + y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

**例 6.26** 设  $u+e^u=xy$  确定  $u=u(x, y)$ , 试求  $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ .

**解析** 将等式  $u+e^u=xy$  两边分别对  $x, y$  求偏导得

$$u'_x + e^u u'_x = y, \quad u'_y + e^u u'_y = x,$$

由此可得

$$u'_x = \frac{y}{1+e^u}, \quad u'_y = \frac{x}{1+e^u},$$

将左式两边对  $y$  求偏导并用右式化简得

$$u''_{xy} = \frac{1+e^u - ye^u u'_y}{(1+e^u)^2} = \frac{1+2e^u - ue^u}{(1+e^u)^3}.$$

**例 6.27** 设由  $f(x, x-y, x-y-z)=0$  确定  $z$  为  $x, y$  的函数,  $f$  的二阶偏导数连续,  $f'_3 \neq 0$ , 试求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

**解析** 记  $F(x, y, z) = f(x, x-y, x-y-z) = 0$ , 应用隐函数求偏导数法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{f'_1 + f'_2 + f'_3}{-f'_3} = 1 + \frac{f'_1 + f'_2}{f'_3}.$$

上式两边对  $y$  求偏导得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{(f'_3)^2} \left[ f'_3 \cdot \frac{\partial}{\partial y} (f'_1 + f'_2) - (f'_1 + f'_2) \frac{\partial}{\partial y} f'_3 \right] \\ &= \frac{1}{(f'_3)^2} \left\{ f'_3 \cdot \left[ -f''_{12} + f''_{13} \cdot \left( -1 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) - f''_{22} + f''_{23} \cdot \left( -1 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] \right\}\end{aligned}$$

$$-(f'_1 + f'_2) \left[ -f''_{32} + f''_{33} \cdot \left( -1 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right], \quad (1)$$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-f'_2 - f'_3}{-f'_3} = -1 - \frac{f'_2}{f'_3},$$

所以

$$-1 - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{f'_2}{f'_3}, \quad (2)$$

将(2)代入(1)化简得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = & \frac{1}{(f'_3)^2} \left[ f'_2 \cdot (f''_{13} + f''_{23}) - f'_3 \cdot (f''_{12} + f''_{22}) + \right. \\ & \left. (f'_1 + f'_2) \left( f''_{23} - f''_{33} \cdot \frac{f'_2}{f'_3} \right) \right]. \end{aligned}$$

**例 6.28** 设变换  $\begin{cases} u=x+ay, \\ v=x+by \end{cases}$  将方程

$$2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

化为  $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$ , 其中  $z$  具有二阶连续偏导数, 试求常数  $a, b$  的值.

**解析**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = a \frac{\partial z}{\partial u} + b \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$= a \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (a+b) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= a \left( \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right) + b \left( \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2ab \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + b^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (2+a-a^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (4+a+b-2ab) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \\ &\quad (2+b-b^2) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,\end{aligned}$$

按题意, 应有

$$2+a-a^2=0, \quad 2+b-b^2=0, \quad 4+a+b-2ab \neq 0,$$

由此解得  $a=2, b=-1$  或  $a=-1, b=2$ .

**例 6.29** 设  $u=x, v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}, w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$ , 试以  $w=w(u, v)$  为新的未知函数, 改变方程

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$$

的形式.

**解析** 在  $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$  中  $z$  是  $x, y$  的函数, 此式两边分别对  $x, y$  求偏导得

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{z^2} \frac{\partial z}{\partial y}. \quad (1)$$

另一方面

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 + \left(-\frac{1}{y^2}\right) \frac{\partial w}{\partial v}.\end{aligned} \quad (2)$$

联立(1), (2)可解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -z^2 \left( \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{z^2}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -z^2 \left( -\frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v},$$

一起代入原方程得

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} &= -x^2 z^2 \frac{\partial w}{\partial u} - z^2 \frac{\partial w}{\partial v} + z^2 + z^2 \frac{\partial w}{\partial v} \\ &= -x^2 z^2 \frac{\partial w}{\partial u} + z^2 = z^2, \end{aligned}$$

化简得新方程为  $\frac{\partial w}{\partial u} = 0$ .

**例 6.30** 若  $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+$  有

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z),$$

则称  $f$  为  $n$  次齐次函数. 设  $f$  连续可微, 求证:

(1)  $f$  是  $n$  次齐次函数的充要条件是

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf;$$

(2) 若  $f$  是  $n$  次齐次函数, 则由  $f(x, y, z) = 0$  确定的函数  $z = z(x, y)$  是一次齐次函数.

**解析** (1) (必要性) 设  $f$  为  $n$  次齐次函数, 在  $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z)$  两边对  $\lambda$  求导得

$$\begin{aligned} xf'_1(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + yf'_2(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + zf'_3(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ = n\lambda^{n-1} f(x, y, z), \end{aligned}$$

令  $\lambda = 1$  代入上式即得

$$xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) = nf(x, y, z).$$

(充分性) 设  $xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf$ , 则  $\forall \lambda \in \mathbf{R}_+$  有

$$\begin{aligned} \lambda x f'_{\lambda x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda y f'_{\lambda y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \lambda z f'_{\lambda z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \\ = nf(\lambda x, \lambda y, \lambda z), \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) &= xf'_{\lambda x}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + yf'_{\lambda y}(\lambda x, \lambda y, \lambda z) + \\ &\quad zf'_{\lambda z}(\lambda x, \lambda y, \lambda z), \end{aligned}$$

所以有

$$\frac{df(\lambda x, \lambda y, \lambda z)}{f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)} = \frac{n}{\lambda} d\lambda,$$

两边积分得  $f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = C\lambda^n$ , 令  $\lambda=1$  解得  $C=f(x, y, z)$ , 于是

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^n f(x, y, z),$$

即  $f$  为  $n$  次齐次函数.

(2) 因  $f$  是  $n$  次齐次函数, 由(1)得

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = nf,$$

由于  $f(x, y, z)=0$ , 且  $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{f'_x}{f'_z}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{f'_y}{f'_z}$ , 一并代入上式得

$$-xf'_z \cdot \frac{\partial z}{\partial x} - yf'_z \frac{\partial z}{\partial y} + zf'_z = 0,$$

于是

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

此式表明  $z=z(x, y)$  为一次齐次函数.

**例 6.31** 设函数  $f(x, y) = 2(y-x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - y^2$ ,

(1) 求  $f(x, y)$  的极值;

(2) 当  $(x, y)$  在过原点  $(0, 0)$  的任一直线上变化时, 求证  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  取极小值.

**解析** (1) 先求函数  $f(x, y)$  的驻点, 由

$$\begin{cases} f'_x = -8x(y-x^2) - x^6 = 0, \\ f'_y = 4(y-x^2) - 2y = 0, \end{cases}$$

解得驻点为  $P_1(0, 0), P_2(-2, 8)$ . 又

$$A = f''_{xx} = -8y + 24x^2 - 6x^5,$$

$$B = f''_{xy} = -8x,$$

$$C = f''_{yy} = 2,$$

$$\Delta = B^2 - AC = 16x^2 + 16y + 12x^5,$$

由于  $\Delta(-2, 8) = -192 < 0, C = 2 > 0$ , 所以

$$f(-2, 8) = 2(8-4)^2 + \frac{1}{7} \cdot 128 - 64 = -\frac{352}{7}$$

为极小值.

由于  $\Delta(0, 0) = 0$ , 由此不能判定  $f(0, 0) = 0$  是否为极值. 因  $x = 0$  时  $f(0, y) = y^2$ , 所以在  $(0, 0)$  的任意邻域内, 存在  $y_0 \neq 0$ , 使得  $f(0, y_0) > 0$ ; 又  $y = x^2$  时,  $f(x, x^2) = -\frac{1}{7}x^7 - x^4$ , 所以在  $(0, 0)$  的任意邻域内, 存在  $x_0 \neq 0$ , 使得  $f(x_0, x_0^2) < 0$ . 于是  $f(0, 0)$  不是极值.

(2) 过原点  $(0, 0)$  的任一直线可写为  $y = kx$  或  $x = 0$ . 由于  $f(0, y) = y^2 \geq 0$ , 所以当  $(x, y)$  在  $y$  轴上变化时,  $f(0, 0) = 0$  为极小值. 又

$$\begin{aligned} f(x, kx) &= 2(kx - x^2)^2 - \frac{1}{7}x^7 - k^2x^2 \\ &= k^2x^2 - 4kx^3 + 2x^4 - \frac{1}{7}x^7, \end{aligned}$$

当  $|x|$  充分小时,  $f(x, kx)$  的符号由  $k^2x^2$  决定 (当  $k=0$  时, 由  $2x^4$  决定), 所以  $f(x, kx) \geq 0$ , 于是当  $(x, y)$  在直线  $y = kx$  上变化时,  $f(x, kx)$  在  $(0, 0)$  也取极小值  $f(0, 0) = 0$ .

**例 6.32** 求函数  $f(x, y) = (1 + e^x)\cos y - xe^x$  的极值.

**解析** 先求函数  $f(x, y)$  的驻点, 由

$$\begin{cases} f'_x = e^x \cos y - e^x(x+1) = e^x(\cos y - x - 1) = 0, \\ f'_y = -(1 + e^x)\sin y = 0 \end{cases}$$

解得驻点为  $(x_n, y_n) = ((-1)^n - 1, n\pi) \ (n \in \mathbf{Z})$ . 又

$$A = f''_{xx} = e^x(\cos y - x - 2),$$

$$B = f''_{xy} = -e^x \sin y,$$

$$C = f''_{yy} = -(1 + e^x)\cos y,$$

它们在驻点的值为

$$A(x_n, y_n) = -e^{(-1)^n - 1},$$

$$B(x_n, y_n) = 0,$$





$$C(x_n, y_n) = (-1)^{n+1} (1 + e^{(-1)^{n-1}}),$$

于是

$$\Delta = B^2 - AC = (-1)^{n+1} (1 + e^{(-1)^{n-1}}) e^{(-1)^{n-1}}.$$

当  $n=2k$  为偶数时,  $\Delta < 0, A < 0$ , 所以

$$f(x_{2k}, y_{2k}) = f(0, 2k\pi) = 2$$

为极大值.

当  $n=2k+1$  为奇数时,  $\Delta > 0$ , 所以  $f(x_{2k+1}, y_{2k+1})$  不是极值.

**例 6.33** 设  $z=z(x, y)$  是由方程

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$$

确定的函数, 试求  $z=z(x, y)$  的极值.

**解析** 令

$$F(x, y, z) = x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18,$$

应用隐函数求偏导数法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x-6y}{-2y-2z} = \frac{x-3y}{y+z},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-6x+20y-2z}{-2y-2z} = \frac{-3x+10y-z}{y+z},$$

由  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$  解得  $x=3y, z=y$ , 与原式联立解得驻点为

$$P_1(9, 3) \text{ 与 } P_2(-9, -3),$$

再求二阶偏导数,

$$\begin{aligned} A &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{P_1} = \frac{1}{(y+z)^2} \left[ y+z - (x-3y) \frac{\partial z}{\partial x} \right] \Big|_{P_1} \\ &= \frac{1}{4y^2} \cdot 2y \Big|_{P_1} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \left. \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right|_{P_1} = \frac{1}{(y+z)^2} \left[ -3(y+z) - (x-3y) \left( 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] \Big|_{P_1} \\ &= \frac{1}{4y^2} (-6y) \Big|_{P_1} = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{P_1} \\
 &= \frac{1}{(y+z)^2} \left[ \left( 10 - \frac{\partial z}{\partial y} \right) (y+z) - (-3x+10y-z) \left( 1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right) \right] \Big|_{P_1} \\
 &= \frac{1}{4y^2} (20y) \Big|_{P_1} = \frac{5}{3},
 \end{aligned}$$

于是  $B^2 - AC = -\frac{1}{36} < 0$ , 又  $A = \frac{1}{6} > 0$ , 从而  $P_1(9, 3)$  是  $z(x, y)$  的极小值点, 极小值为  $z(9, 3) = 3$ .

对于驻点  $P_2(-9, -3)$ , 类似地可求得

$$A = -\frac{1}{6}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = -\frac{5}{3},$$

于是  $B^2 - AC = -\frac{1}{36} < 0$ ,  $A = -\frac{1}{6} < 0$ , 从而  $P_2(-9, -3)$  是  $z(x, y)$  的极大值点, 极大值为  $z(-9, -3) = -3$ .

**例 6.34** 设曲面  $2x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$  的过点  $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$  的切平面为  $\Pi$ , 与  $\Pi$  平行且过点  $Q(0, 0, 2)$  的平面与  $xy$  平面的交线为  $L$ , 求直线  $L$  与曲线

$$l: \begin{cases} y = x^2, \\ z = 0 \end{cases}$$

之间的最短距离.

**解析** 令  $F = 2x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 1$ , 则原曲面的法向量为

$$(F'_x, F'_y, F'_z) = (4x, 8y, 8z),$$

所以该曲面在点  $P$  的法向量为  $\mathbf{n} = 2(1, -1, 1)$ , 于是切平面  $\Pi$  的方程为

$$x - y + z - 1 = 0.$$

与  $\Pi$  平行且过点  $Q$  的平面  $\Pi_1$  为

$$x - y + z - 2 = 0.$$

平面  $\Pi_1$  与  $xy$  平面的交线为  $L: \begin{cases} x-y-2=0, \\ z=0, \end{cases}$  于是问题化为求  $xy$

平面上的直线  $x-y=2$  与抛物线  $y=x^2$  之间的最短距离. 应用拉格朗日乘数法, 令

$$F = \frac{1}{2}(x-y-2)^2 + \lambda(y-x^2),$$

由

$$\begin{cases} F'_x = x-y-2-2\lambda x = 0, \\ F'_y = -(x-y-2) + \lambda = 0, \\ F'_\lambda = y-x^2 = 0, \end{cases}$$

解得  $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{4}$  为惟一的可疑极值点. 根据几何意义, 条件极小

值存在, 所以在  $x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{4}$  时,  $L$  与  $l$  的距离取最小值, 其值为

$$d = \frac{|x_0 - y_0 - 2|}{\sqrt{2}} = \frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

**例 6.35** 已知三角形的周长为  $p$ , 求出这样的三角形, 当它绕着自己的一边旋转时, 所得的立体体积最大.

**解析** 设三角形的边长为  $a, b, c$ , 则  $a+b+c=p$ , 设绕  $a$  边旋转, 则旋转体体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 a \quad (h \text{ 为 } a \text{ 边上的高}).$$

由三角形面积公式, 有

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)},$$

由此式解出  $h$  代入旋转体体积表达式得

$$V = \frac{1}{12a}\pi p(p-2a)(p-2b)(p-2c).$$

考虑函数

$$u = \ln \frac{(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{a},$$

则  $u$  与  $V$  同时取最大值. 问题化为: 求函数  $u(a, b, c)$  在约束条件  $a+b+c=p$  下的最大值. 引进拉格朗日函数,

$$F = \ln \frac{(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{a} + \lambda(a+b+c-p),$$

由

$$\begin{cases} F'_a = -\frac{2}{p-2a} - \frac{1}{a} + \lambda = 0, \\ F'_b = -\frac{2}{p-2b} + \lambda = 0, \\ F'_c = -\frac{2}{p-2c} + \lambda = 0, \\ a+b+c = p \end{cases}$$

可解出  $a = \frac{p}{4}, b=c = \frac{3}{8}p$ , 此时旋转体体积为  $\frac{\pi}{12} \left(\frac{2}{p}\right)^3$ . 根据问题的

几何意义和驻点的惟一性可知, 当三角形三边长分别为  $\frac{p}{4}, \frac{3}{8}p,$

$\frac{3}{8}p$ , 且绕边长为  $\frac{p}{4}$  的边旋转时体积最大.

**例 6.36** 用铁皮制造一只上部为圆柱形, 下部为圆锥形的无盖容器, 容积为 25 立方单位, 试问该容器的尺寸如何设计用料最省.

**解析** 设圆柱形的半径为  $r$ , 高为  $H$ , 圆锥形的高为  $h$ , 则无盖容器的表面积(即铁皮用料的面积)为

$$S = 2\pi rH + \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \sqrt{r^2 + h^2} = \pi r(2H + \sqrt{r^2 + h^2}),$$

该容器的容积为

$$\pi r^2 H + \frac{1}{3} \pi r^2 h = 25.$$

应用拉格朗日乘数法, 令

$$F = \pi r(2H + \sqrt{r^2 + h^2}) + \lambda[\pi r^2(3H + h) - 75],$$

由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = \pi \left( 2H + \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right) + 2\lambda\pi r(3H + h) = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial H} = 2\pi r + 3\lambda\pi r^2 = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = \pi r \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} + \lambda\pi r^2 = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = \pi r^2(3H + h) - 75 = 0 & (4) \end{cases}$$

的(2)式得  $\lambda = -\frac{2}{3r}$ , 代入(3)式得  $h = 2t$ ,  $r = \sqrt{5}t$ , 代入(1)式得  $H = t$ , 一并代入(4)式得

$$t = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}},$$

于是

$$r = \sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}, \quad H = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}, \quad h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$$

是拉格朗日函数  $F$  的惟一驻点. 根据问题的实际意义, 容器的表面积的最小值存在. 故将容器设计为圆柱形的半径为  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ , 高为  $\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ , 圆锥的高为  $2 \cdot \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$  时用料最省.

**例 6.37** 在锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  与平面  $z = 1$  所围的封闭曲面内作一长方体使其体积最大, 并求这个体积的最大值.

**解析** 设所求长方体的底面与圆锥面在第一卦限的交点为  $(x, y, z)$ , 则该长方体的体积为

$$V = 4xy(1 - z),$$

这里  $2x, 2y$  是底面的长与宽,  $1 - z$  是长方体的高.

**方法 I** 应用拉格朗日乘数法, 求  $V$  满足条件  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  的极值. 令

$$F = 4xy(1-z) + \lambda(x^2 + y^2 - z^2) \quad (0 < z < 1),$$

由

$$\begin{cases} F'_x = 4y(1-z) + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = 4x(1-z) + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = -4xy - 2\lambda z = 0, \\ F'_\lambda = x^2 + y^2 - z^2 = 0, \end{cases}$$

解得  $x = \frac{1}{3}\sqrt{2}, y = \frac{1}{3}\sqrt{2}, z = \frac{2}{3}$ , 由于所求最大体积的长方体存在, 而可疑的条件极值点  $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{2}{3})$  是惟一的, 所以在该点的体积  $V$  取最大值,

$$V_{\max} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27}.$$

**方法 II** 由  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  得  $V = 4xy(1 - \sqrt{x^2 + y^2})$ , 由

$$V'_x = 4y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - 4xy \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

$$V'_y = 4x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - 4xy \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

解得(在  $0 < x, y < 1$  条件下)驻点为  $(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$ , 由于所求最大体积的长方体存在, 而驻点又是惟一的, 故所求体积的最大值为

$$V_{\max} = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \left(1 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8}{27}.$$

**例 6.38** 在球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$  ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ) 上求一点使函数

$$f(x, y, z) = \ln x + \ln y + 3 \ln z$$

达到极大,且求出其极大值. 利用上述结果证明:  $a>0, b>0, c>0$  时

$$abc^3 \leq 27 \left( \frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$

**解析** 应用拉格朗日乘数法, 令

$$F = \ln x + \ln y + 3 \ln z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 5r^2),$$

由

$$\begin{cases} F'_x = \frac{1}{x} + 2\lambda x = 0, \\ F'_y = \frac{1}{y} + 2\lambda y = 0, \\ F'_z = \frac{3}{z} + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2 \end{cases}$$

可解得惟一驻点  $(r, r, \sqrt{3}r)$ . 由于在题给  $\frac{1}{8}$  球面的边界上  $(xyz \rightarrow 0)$ ,  $f \rightarrow -\infty$ , 所以函数  $f$  在  $(r, r, \sqrt{3}r)$  处取最大值  $f_{\max} = \ln(3\sqrt{3}r^5)$ , 因此

$$\ln(xyz^3) \leq \ln 3\sqrt{3}r^5,$$

于是

$$xyz^3 \leq 3\sqrt{3}r^5 = 3\sqrt{3} \left( \frac{x^2 + y^2 + z^2}{5} \right)^{\frac{5}{2}},$$

两边平方, 并令  $x^2 = a, y^2 = b, z^2 = c$ , 即得

$$abc^3 \leq 27 \left( \frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$



## 阶段复习试题三

1. 计算下列各题:

(1) 设  $|a| = 3$ ,  $|b| = 2$ ,  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{6}$ , 求  $|3a - 2b|$ ;

(2) 设  $|a| = 3$ ,  $|b| = 4$ ,  $|a - b| = 6$ , 求  $|a + b|$ ;

(3) 已知  $a = (1, -1, 0)$ ,  $b = (2, 1, 1)$ , 求  $\text{Prj}_a b$ ;

(4) 若  $(a + 3b) \perp (7a - 5b)$ ,  $(a - 4b) \perp (7a - 2b)$ , 求  $a$  与  $b$  的夹角;

(5) 已知  $a$  与  $b$  皆为非零向量,  $a \cdot b = |a \times b| = [a, b, a \times b]$ , 求  $a$  与  $b$  的夹角,  $a \cdot b$ ;

(6) 化简  $(2a + b) \cdot [(a - 2b) \times c]$ ;

(7) 已知  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{2}{3}\pi$ ,  $|a| = 3$ ,  $|b| = 4$ , 求  $a \cdot b$ ,  $|a \times b|$ ;

(8) 设  $\alpha = 2a - b$ ,  $\beta = \lambda a + b$ ,  $|a| = 1$ ,  $|b| = 2$ ,  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{3}$ , 若  $\alpha \perp \beta$  或  $\alpha \parallel \beta$ , 分别求  $\lambda$  的值.

2. 已知  $|a| \neq 0$ ,  $|b| = 1$ ,  $a$  与  $b$  的夹角为  $\frac{\pi}{4}$ , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a - xb| - |a|}{x}.$$

3. 求以  $A(0, 1, 2)$ ,  $B(1, -1, 3)$ ,  $C(2, 1, -1)$  为顶点的三角形的面积.

4. 设  $|a| = |b| = 1$ ,  $\langle a, b \rangle = \frac{\pi}{6}$ , 求以  $a + 2b$  与  $3a + b$  为邻边的平行四边形的面积.

5. 求过直线  $\begin{cases} 3x + y - z - 1 = 0, \\ 2x + y - z - 2 = 0 \end{cases}$  且与平面  $2x + y + 5z = 5$  垂直



的平面方程.

6. 求过直线  $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1}$ , 且与直线  $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$  平行的平面方程.

7. 求过点  $(1, 1, -1)$  和两平面  $x+y-z=0$  与  $x-y+z=1$  的交线的平面方程.

8. 求直线  $L: \begin{cases} x+y+z-2=0, \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$  在平面  $x-y-z=0$  上的投影方程, 以及它与直线  $L$  的交点.

9. 已知平面  $\Pi: x+y+z+1=0$  与直线  $L: \begin{cases} y+z+1=0, \\ x+2z=0 \end{cases}$  一直线位于平面  $\Pi$  上, 通过  $L$  与  $\Pi$  的交点, 且与直线  $L$  垂直, 求此直线方程.

10. 求两直线  $L_1: \frac{x+3}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-1}$  与  $L_2: \frac{x+6}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{-1}$  的公垂线方程.

11. 求直线  $\frac{x-1}{0} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$  与  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{2}$  之间的距离.

12. 求点  $(0, -1, -3)$  关于直线  $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+1}{11}$  的对称点.

13. 说明平面  $x+2y+3z+5=0$  与直线  $x-1=y-3=-z+6$  的位置关系.

14. 求点  $(0, 0, 3)$  到直线  $x-1 = \frac{y+1}{-1} = z$  的距离.

15. 自原点作直线  $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$  的垂线, 求垂线的方程.

16. 求通过点  $(2, 1, 0)$  且与两直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$ ,  $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-2}$  都相交的直线的点向式方程.

17. 求以  $xy$  平面上的曲线  $x^2 + y^2 = 1$  为准线, 母线的方向向量为  $l = (1, 2, 1)$  的柱面方程.

18. 求以直线  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$  为对称轴, 半径等于 2 的圆柱面方程.

19. 求以  $\Gamma: \begin{cases} x^2 - y^2 = z, \\ x + y + z = 0 \end{cases}$  为准线, 母线垂直于  $\Gamma$  所在平面的柱面方程.

20. 求曲线  $\begin{cases} 2(z-x) = x^2 + y^2, \\ z = x + y \end{cases}$  在  $xy$  平面上的投影.

21. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z = 26$  与平面  $2x + 2y + z = 1$  相交所成的圆周的周长.

22. 求曲线  $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ z = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周的旋转曲线面的方程.

23. 直线  $\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}$  绕  $z$  轴旋转一周, 求旋转曲面的方程.

24. 求椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$  的切平面, 使其通过直线  $\frac{x+6}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{2z+1}{-2}$ .

25. 求  $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow 1}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{2x^2}{x+y}}$ .

26. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt[3]{xy} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

讨论  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  的连续性, 可偏导性与可微性.

27. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin x + \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

讨论  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  的连续性, 可偏导性与可微性.

28. 设

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

讨论  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  的连续性, 可偏导性, 可微性与连续可微性.

29. 求下列偏导数或全微分:

(1)  $f(x, y) = x^3 + (\ln y) \arcsin \sqrt{\frac{x}{x^2 + y^2}}$ , 求  $f'_x(2, 1), f'_y(2, 1)$ ;

(2)  $z = (1 + xy)^y$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(3)  $u = x^{xy} + y^{xz} + z^{xz}$ , 求: 1)  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ ; 2)  $u$  在点  $(1, 1, 1)$  的全微分;

(4)  $z = x^3 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ ,  $f$  可导, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(5)  $z = f(xy, x^2 + y^2)$ ,  $y = \varphi(x)$ ,  $f, \varphi$  均可微, 求  $\frac{dz}{dx}$ ;

(6)  $z = f(x, v) = x^2 + v$ ,  $v = \cos^2 x$ , 求  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{dz}{dx}$ ;

(7)  $u = \arcsin \frac{x}{y} + z^2$ , 求  $du$ ;

(8)  $z = \log_{xy} \sqrt{1 + x^2}$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;

(9)  $z = f(x + \varphi(y))$ ,  $f, \varphi$  二阶导数连续, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ;

(10)  $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}$ ,  $f$  可导, 求  $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y}$ ;

(11)  $z = \frac{1}{x}f(xy) + yf(x+y)$ ,  $f$  二阶导数连续, 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ ;

(12)  $z = f(x, y)$ ,  $x = \varphi(y)$ ,  $\varphi$  连续可导,  $f$  二阶导数连续, 求  $\frac{d^2 z}{dx^2}$ ;

(13)  $f$  连续可导,  $z(x, y) = \int_0^y e^y f(x-t) dt$ , 求  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

30. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $F\left(x - \frac{z}{y}, y - \frac{z}{x}\right) = 0$  所确定, 这里  $F$  可微, 计算  $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$ , 并说明此式与  $z$  无关.

31. 设  $z = z(x, y)$  由方程  $x - z = ye^z$  所确定, 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ .

32. 设  $x + y + z = e^z$  确定  $z = z(x, y)$ , 求  $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ .

33. 设  $f(x, x-y, x-y-z) = 0$ ,  $f$  可微, 求  $dz$ .

34. 设  $x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$ ,  $f$  可微, 求  $dz$ .

35. 由  $u = \frac{x-z}{y-z}$ ,  $ze^z = xe^x + ye^y$  确定  $u$  是  $x, y$  的函数, 求  $du$ .

36. 设  $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , 求  $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$ .

37. 设  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}z^2, x + y + z = 2$ , 求  $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}, \frac{d^2 x}{dz^2}$  和  $\frac{d^2 y}{dz^2}$  在  $x=1, y=-1, z=2$  时的值.

38. 设  $u = f(x^2, y^2, z^2), y = e^x, \varphi(y, z) = 0$ , 这里  $f, \varphi$  皆可微, 求全导数  $\frac{du}{dx}$ .

39. 求由  $y = x\varphi\left(\frac{z}{x}\right) + \psi(yz)$  所确定的  $z = z(x, y)$  在点  $(1, -1, 1)$  处的切平面与法线方程.

40. 求曲面  $x^2 + y^2 + 3z^2 = 29$  的平行于平面  $x + 4y + 6z = 0$  的切平面方程.

41. 求下列方向导数:

(1) 求  $z = x^2 - y^2$  在点  $(1, 1)$  沿与  $x$  轴正向成角  $\alpha = 60^\circ$  方向上的方向导数;

(2) 求  $z = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$  在点  $P(1, 1)$  沿  $\overrightarrow{OP}$  方向的方向导数;

(3) 求  $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  沿着  $\frac{1}{2}x^2 + yz$  的梯度方向的方向导数;

(4) 求  $u = xy + yz + zx$  在点  $P(1, 2, 3)$  处沿矢径  $\overrightarrow{OP}$  方向的方向导数;

(5) 求  $u = x + y + z$  在沿球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  上点  $(x_0, y_0, z_0)$  的外法线方向上的方向导数, 并问在球面上怎样的点使得上述方向导数取最大值.

42. 在球面  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 16$  上求一点, 使该点到  $(0, 0, 0), (0, 0, 2)$  的距离的平方和最小.

43. 试问平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  上哪一点到原点的距离最小.

44. 已知曲面  $\Sigma: \sqrt{x} + 2\sqrt{y} + 3\sqrt{z} = 3$ , (1) 求曲面上点  $P(a, b, c)$  处的切平面方程; (2) 问  $a, b, c$  为何值时, 上述切平面与三个坐标平面所围的四面体体积最大.



## 7

## 重积分

## 7.1 基本概念与内容提要

## 1) 二重积分的定义、性质和几何意义

设  $D \subset \mathbf{R}^2$  为有界闭域,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$ , 将区域  $D$  任意地分割为  $n$  个子域  $D_i (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $D_i$  的面积记为  $\Delta\sigma_i$ ,  $D_i$  的直径记为  $d_i$ , 在每个  $D_i$  上任取点  $(x_i, y_i)$ , 若和式

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$$

在分割的模  $\lambda \rightarrow 0$  ( $\lambda = \max_i d_i$ ) 时有有限极限, 则称  $f$  在  $D$  上可积, 记为

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i.$$

当  $f(x, y)$  在  $D$  上连续, 或分块连续且有界时,  $f$  在  $D$  上可积.

函数  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  在几何上表示

曲顶柱体  $\Omega$  (以  $D$  为底,  $z = f(x, y) (> 0)$  为顶, 侧面是以  $D$  的边界曲线为准线, 母线平行于  $z$  轴的柱面) 的体积.

二重积分与定积分有着完全相同的性质.

## 2) 二重积分的计算(累次积分法)

当区域  $D$  可表示为

$$D = \{(x, y) \mid \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$$

时,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

当区域  $D$  可表示为

$$D = \{(x, y) \mid \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y), c \leq y \leq d\}$$

时,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y) dx.$$

### 3) 二重积分的换元积分公式

设  $D \subset \mathbf{R}^2$  为有界闭域,  $f: D \rightarrow \mathbf{R}$  连续,  $x = x(u, v)$ ,  $y = y(u, v)$  在有界闭域  $D'$  上连续可微,  $D$  与  $D'$  的点一一对应, 且

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

常用的变换有极坐标变换:  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$ , 则  $|J| = \rho$ . 当

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \rho_1(\theta) \leq \rho \leq \rho_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

时,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^\beta d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho;$$

当

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \theta_1(\rho) \leq \theta \leq \theta_2(\rho), a \leq \rho \leq b\}$$

时,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b d\rho \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta.$$

#### 4) 三重积分的定义、性质和物理意义

定积分、二重积分与三重积分的定义具有通性,这就是“分割取近似,求和取极限”;其性质也类似. 三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

在物理上表示立体区域  $\Omega$  的质量,这里  $f(x, y, z) (\geq 0)$  视为区域  $\Omega$  的体密度函数.

#### 5) 三重积分的计算(累次积分法)

若区域  $\Omega$  可表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\},$$

其中  $D$  为  $xy$  平面上的有界闭域,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

设区域  $\Omega$  在  $z$  轴上的投影为  $[h, k]$ ,任取  $z \in (h, k)$ ,过点  $(0, 0, z)$  作垂直于  $z$  轴的平面截  $\Omega$ ,截面记为  $D(z)$ ,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_h^k dz \iint_{D(z)} f(x, y, z) dx dy.$$

与上述两公式对应的还有其他顺序的各种形式的累次积分,不赘述.

#### 6) 三重积分的换元积分公式

设  $\Omega \subset \mathbf{R}^3$  为有界闭域,  $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  连续,函数组  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$ ,  $z = z(u, v, w)$  在有界闭域  $\Omega'$  上连续可微,  $\Omega$  与  $\Omega'$  的点一一对应,且

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0,$$

则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz$$

数学  
分析  
PDG



$$= \iiint_{\Omega} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) |J| du dv dw.$$

\* 常用的变换有柱坐标变换和球坐标变换:

(1) 柱坐标变换  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z, |J| = \rho$ , 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz.$$

(2) 球坐标变换  $x = r \sin \varphi \cos \theta, y = r \sin \varphi \sin \theta, z = r \cos \varphi, |J| = r^2 \sin \varphi$ , 则

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \end{aligned}$$

7) \* 变换累次积分的积分次序

8) \* 奇、偶函数的重积分

若  $f(x, y)$  在有界闭域  $D$  上可积, 区域  $D$  关于  $x=0$  对称,  $f(x, y)$  关于  $x$  是奇函数 (即  $f(-x, y) = -f(x, y)$ ) 或偶函数 (即  $f(-x, y) = f(x, y)$ ), 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \begin{cases} 0, & \text{当 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数,} \\ 2 \iint_{D_1} f(x, y) dx dy, & \text{当 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

这里  $D_1$  是区域  $D$  的  $x \geq 0$  部分.

若  $f(x, y)$  关于  $y$  有奇、偶性,  $D$  关于  $y=0$  对称, 有与上述类似的结论.

关于三重积分, 亦有与上述类似的结论.

9) 重积分的应用

(1) 几何上的应用.

(i) 平面图形的面积. 设  $D$  为  $xy$  平面上的有界闭域, 则  $D$  的面积为

$$S = \iint_D dx dy = \iint_D \rho d\rho d\theta.$$

(ii) 曲面的面积. 设  $\Sigma$  为空间曲面,  $\Sigma$  在  $xy$  平面上的投影为有界闭域  $D$ ,  $\Sigma$  的点与  $D$  的点一一对应, 设  $\Sigma$  的方程为  $z=f(x, y)$ , 则  $\Sigma$  的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2} dx dy.$$

与此公式对应的有化为  $yz$  平面上或化为  $zx$  平面上的二重积分的曲面面积的计算公式.

(iii) 立体的体积. 设  $\Omega$  为空间立体区域,  $\Omega$  为有界闭域, 则  $\Omega$  的体积为

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega} \rho d\rho d\theta dz = \iiint_{\Omega} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta.$$

(2) 物理上的应用.

二重积分可用于计算平面薄片的质量; 三重积分可用于求立体的质量、重心等.

(3) 其他应用.

用重积分证明有关的等式或不等式.

## 7.2 典型习题与试题解析

**例 7.1** 设  $D$  为  $xy$  平面上以  $(1, 1), (-1, 1), (-1, -1)$  为顶点的三角形区域,  $D_1$  为  $D$  位于第一象限的部分区域, 试将二重积分

$$\iint_D (x \sin y + y \cos x) dx dy$$

表示为  $D_1$  上的二重积分, 并求其值.

**解析** 用  $y=-x$  将区域  $D$  分为两块. 记  $D$  的  $y \geq -x$  部分为  $D_+$ , 记  $D$  的  $y \leq -x$  部分为  $D_-$  (见下图 7.1), 则

$$\text{原式} = \iint_{D_+} (x \sin y + y \cos x) dx dy + \iint_{D_-} (x \sin y + y \cos x) dx dy.$$

由于  $D_+$  关于  $x=0$  对称,  $x\sin y$  关于  $x$  为奇函数,  $y\cos x$  关于  $x$  为偶函数;  $D_-$  关于  $y=0$  对称,  $x\sin y$  关于  $y$  为奇函数,  $y\cos x$  关于  $y$  为奇函数, 故

$$\iint_{D_+} (x\sin y + y\cos x) dx dy = 2 \iint_{D_1} y\cos x dx dy,$$

$$\iint_{D_-} (x\sin y + y\cos x) dx dy = 0,$$

$$\text{原式} = 2 \iint_{D_1} y\cos x dx dy = 2 \int_0^1 dy \int_0^y y\cos x dx$$

$$= 2 \int_0^1 y \sin y dy = -2 \int_0^1 y d(\cos y)$$

$$= -2y\cos y \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \cos y dy$$

$$= -2\cos 1 + 2\sin y \Big|_0^1 = 2(\sin 1 - \cos 1).$$

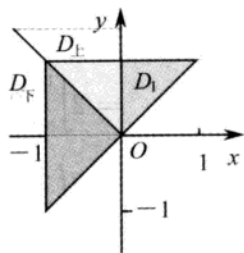


图 7.1

**例 7.2** 试求  $\iint_D |y - x^2| dx dy$ ,  $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ .

**解析** 用曲线  $y = x^2$  将积分区域  $D$  分为两部分  $D_1 + D_2$  (如图 7.2),

$$D_1 = \{(x, y) \mid x^2 \leq y \leq 2, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^2, -1 \leq x \leq 1\},$$

于是

$$\text{原式} = \iint_{D_1} (y - x^2) dx dy + \iint_{D_2} (x^2 - y) dx dy$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 (y - x^2) dy +$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy$$

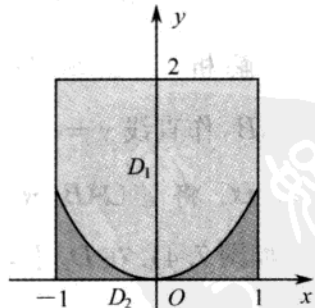


图 7.2

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 \left( \frac{y^2}{2} - x^2 y \right) \Big|_{x^2}^2 dx - \int_{-1}^1 \left( x^2 y - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{x^2} dx \\
&= \int_{-1}^1 \left( 2 - 2x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^4 dx \\
&= 2 \int_0^1 \left( 2 - 2x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx + \int_0^1 x^4 dx \\
&= 2 \left( 2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{10} \right) + \frac{1}{5} = \frac{46}{15}.
\end{aligned}$$

**例 7.3** 求二重积分  $\iint_D e^{\max\{x^2, y^2\}} dx dy$ , 其中  $D$  为  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ .

**解析** 用  $y=x$ , 将  $D$  分为  $D_1+D_2$ , 如图 7.3, 则

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{D_1} e^{y^2} dx dy + \iint_{D_2} e^{x^2} dx dy \\
&= \int_0^1 dy \int_0^y e^{y^2} dx + \int_0^1 dx \int_0^x e^{x^2} dy \\
&= \int_0^1 y e^{y^2} dy + \int_0^1 x e^{x^2} dx \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1.
\end{aligned}$$

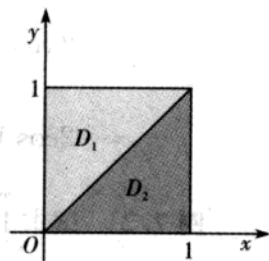


图 7.3

**例 7.4** 设  $D$  由直线  $y=x, y=0, x=\frac{\pi}{2}$  所围成. 计算

$$\iint_D |\cos(x+y)| dx dy.$$

**解析** 区域  $D$  在图 7.4 中为  $\triangle OAB$ , 作直线  $y=-x+\frac{\pi}{2}$  交  $OA$  于  $C$ , 线段  $BC$  将  $\triangle OAB$  分为两部分  $D_1$  与  $D_2$  (如图 7.4). 在  $D_2$  上,  $0 \leq y+x \leq \frac{\pi}{2}$ ;

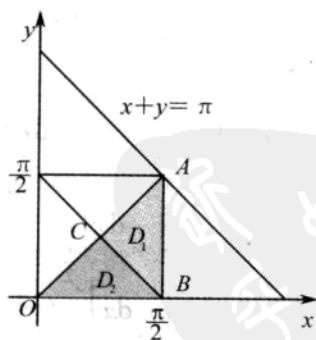


图 7.4

在  $D_1$  上,  $\frac{\pi}{2} \leq y+x \leq \pi$ , 于是有

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_{D_2} \cos(x+y) dx dy - \iint_{D_1} \cos(x+y) dx dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_y^{\frac{\pi}{2}-y} \cos(x+y) dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\frac{\pi}{2}-x}^x \cos(x+y) dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y) \Big|_y^{\frac{\pi}{2}-y} dy - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x+y) \Big|_{\frac{\pi}{2}-x}^x dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 - \sin 2y) dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin 2x) dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

**例 7.5** 设  $D$  是由  $y = x^3, y = 1, x = -1$  所围的区域,  $f$  是一连续函数, 计算二重积分

$$\iint_D x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy.$$

**解析** 方法 I 因  $f$  连续, 必可积, 令

$$\int_0^x f(x) dx = F(x),$$

则  $f(x) dx = dF(x), f(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2) = dF(x^2 + y^2)$ , 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \iint_D x dx dy + \iint_D xyf(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 x dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^3}^1 xyf(x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_{-1}^1 x(1 - x^3) dx + \int_{-1}^1 \frac{1}{2} xF(x^2 + y^2) \Big|_{x^3}^1 dx \\
 &= -2 \int_0^1 x^4 dx + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x(F(1 + x^2) - F(x^2 + x^6)) dx
 \end{aligned}$$

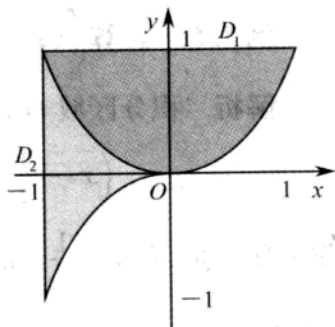


图 7.5

$$=-\frac{2}{5}+0=-\frac{2}{5}.$$

(这里用到奇函数在对称区间上定积分为 0 的性质)

**方法 II** 用  $y=-x^3$  将区域  $D$  分为两部分  $D_1$  与  $D_2$  (如图 7.5), 其中  $D_1$  关于  $x=0$  对称,  $D_2$  关于  $y=0$  对称, 应用奇函数在对称区域上的二重积分的性质, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{D_2} (x + xyf(x^2 + y^2)) dx dy + \iint_{D_1} x[1 + yf(x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \iint_{D_2} x dx dy + 0 + 0 = \int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^{-x^3} x dy \\ &= \int_{-1}^0 -2x^4 dx = -\frac{2}{5} \Big|_{-1}^0 = -\frac{2}{5}. \end{aligned}$$

**例 7.6** 计算  $\iint_D (x+y)^2 dx dy$ ,  $D: x^2 + y^2 \leq x + y$ .

**解析** 积分区域  $D$  是圆

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

作平移变换, 令  $x - \frac{1}{2} = u, y - \frac{1}{2} = v$ , 则区域  $D$  化为圆  $D_1: u^2 + v^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ , 且  $dx dy = du dv$ ,

$$\begin{aligned} \iint_D (x+y)^2 dx dy &= \iint_{D_1} (u+v+1)^2 du dv \\ &= \iint_{D_1} (u^2 + v^2 + 2uv + 2u + 2v + 1) du dv, \end{aligned}$$

由于  $D_1$  关于  $u=0$  对称,  $2uv+2u$  关于  $u$  为奇函数, 故

$$\iint_{D_1} (2uv + 2u) du dv = 0;$$

由于  $D_1$  关于  $v=0$  对称,  $2v$  关于  $v$  为奇函数, 故

$$\iint_{D_1} 2vdudv = 0.$$

又  $\iint_{D_1} dudv = \pi \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}\pi$ . 下面采用极坐标计算余下的一项,

$$\iint_{D_1} (u^2 + v^2) dudv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{1}{8}\pi.$$

于是

$$\text{原式} = \frac{1}{8}\pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{5}{8}\pi.$$

**例 7.7** 计算  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中

$D$  为  $0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq 2x$ .

**解析** 采用极坐标计算(如图 7.6),

由于

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\},$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\cos\theta)^4 d\theta = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \right) d\theta \\ &= 4 \left( \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{32}\sin 4\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \frac{3}{8}\pi. \end{aligned}$$

**例 7.8** 计算  $\iint_D (x+y)^2 dx dy$ ,  $D$  由  $x^2 + y^2 \geq 2x, x^2 + y^2 \leq 4x$

所决定的区域.

**解析** 采用极坐标计算,

$$\text{原式} = \iint_D (x^2 + 2xy + y^2) dx dy,$$

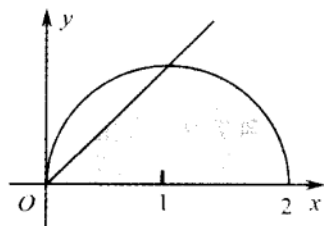


图 7.6

由于区域  $D$  (如图 7.7) 关于  $y=0$  对称, 函数  $2xy$  关于  $y$  为奇函数, 故

$$\iint_D 2xy dx dy = 0,$$

$$\text{原式} = \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (4^4 \cos^4 \theta - 2^4 \cos^4 \theta) d\theta$$

$$= 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta d\theta = 120 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta \right) d\theta$$

$$= 120 \left( \frac{3}{8} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{32} \cos 4\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{45}{2} \pi.$$

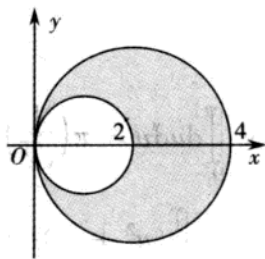


图 7.7

**例 7.9** 设  $D: |y| \leq |x|, |x| \leq 1$ , 将二重积分

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy$$

化为定积分形式.

**解析** 由于积分区域  $D$  关于  $x=0$  对称, 被积函数  $f(\sqrt{x^2+y^2})$  关于  $x$  为偶函数, 所以

$$\iint_D f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = 2 \iint_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy,$$

其中  $D_1$  为  $D$  (如图 7.8) 的  $x \geq 0$  的部分区域. 又由于  $D_1$  关于  $y=0$  对称, 被积函数  $f(\sqrt{x^2+y^2})$  关于  $y$  为偶函数, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\ = 2 \iint_{D_2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy, \end{aligned}$$

其中  $D_2$  为  $D_1$  的  $y \geq 0$  的部分区域, 即  $D$  在

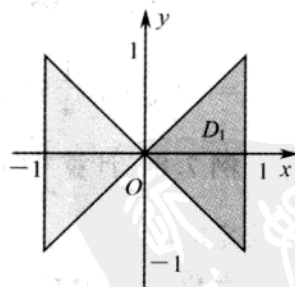


图 7.8



第一象限的部分区域. 采用极坐标计算, 并用  $\rho = 1$  将  $D_2$  分为两部分(如图 7.9), 先对  $\theta$  积分得

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= 4 \iint_{D_2} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\
 &= 4 \iint_{D_2} f(\rho) \rho d\rho d\theta \\
 &= 4 \int_0^1 d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} \rho f(\rho) d\theta + 4 \int_1^{\sqrt{2}} d\rho \int_{\arccos \frac{1}{\rho}}^{\frac{\pi}{4}} \rho f(\rho) d\theta \\
 &= \pi \int_0^1 \rho f(\rho) d\rho + 4 \int_1^{\sqrt{2}} \rho f(\rho) \left( \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{\rho} \right) d\rho.
 \end{aligned}$$

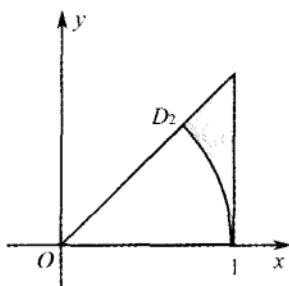


图 7.9

**例 7.10** 交换二次积分  $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y) dx$  的积分次序.

**解析** 积分区域  $D$  由  $x = \sqrt{y}$ ,  $x = \sqrt{2-y^2}$ ,  $y=0$ ,  $y=1$  所围(如图 7.10).  $x = \sqrt{y}$  与  $x = \sqrt{2-y^2}$  的交点为  $(1,1)$ . 交换次序时, 用  $x=1$  将  $D$  分为  $D_1 + D_2$ ,

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq x^2, 0 \leq x \leq 1\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}, 1 \leq x \leq \sqrt{2}\},$$

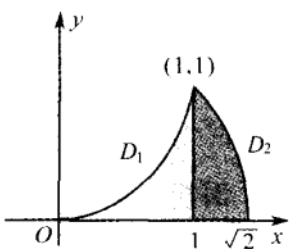


图 7.10

于是

$$\text{原式} = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(x,y) dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y) dy.$$

**例 7.11** 计算

$$\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy.$$

**解析** 这两个二次积分的积分区域分别为

$$D_1 = \{(x,y) \mid \sqrt{x} \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2\},$$

$$D_2 = \{(x, y) \mid \sqrt{x} \leq y \leq 2, 2 \leq x \leq 4\},$$

画出  $D_1 + D_2$  的图形(如图 7.11), 交换二次积分的次序得

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_y^{y^2} \sin \frac{\pi x}{2y} dx \\ &= \int_1^2 \left[ -\frac{2y}{\pi} \cos \frac{\pi x}{2y} \right]_y^{y^2} dy \\ &= -\int_1^2 \frac{2y}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} y dy \\ &= -\frac{8}{\pi^3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t \cos t dt \\ &= -\frac{8}{\pi^3} \left[ t \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right] \\ &= \frac{4}{\pi^3} (2 + \pi). \end{aligned}$$

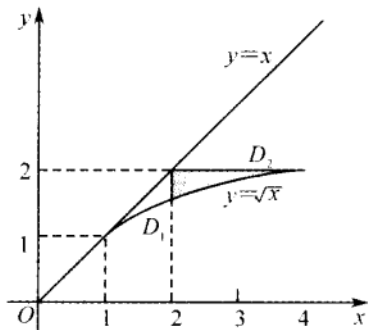


图 7.11

**例 7.12** 将二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  (其中  $D$  为  $0 \leq y \leq x$ ,  $x^2 + y^2 \leq 2x$ ) 表示为极坐标系下的两种顺序的二次积分.

**解析**  $y=x$  的极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ,  $x^2 + y^2 = 2x$  的极坐标方程为  $\rho = 2\cos \theta$ , 在先对  $\rho$  积分, 后对  $\theta$  积分时,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2\cos \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\};$$

在先对  $\theta$  积分, 后对  $\rho$  积分时, 需用  $\rho = \sqrt{2}$  将  $D$  分为  $D_1 + D_2$  (如图 7.12), 其中

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2} \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \arccos \frac{\rho}{\sqrt{2}}, \sqrt{2} \leq \rho \leq 2 \right\}.$$

于是所求两种顺序的二次积分分别为:

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\rho;$$

$$\begin{aligned} \text{原式} = & \int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\theta + \\ & \int_{\sqrt{2}}^2 d\rho \int_0^{\arccos\frac{\rho}{2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \rho d\theta. \end{aligned}$$

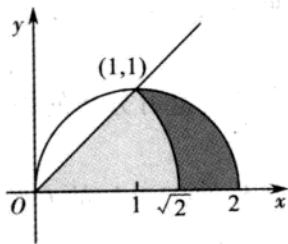


图 7.12

**例 7.13** 试求  $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\frac{x}{2}} dv \int_v^{\frac{x}{2}} \frac{e^{-(u-v)^2}}{1 - \cos x} du$ .

**解析** 交换原式中二次积分的次序(参见图 7.13)得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{\frac{x}{2}} du \int_0^u \frac{e^{-(u-v)^2}}{1 - \cos x} dv \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 - \cos x} \int_0^{\frac{x}{2}} \left( \int_0^u e^{-(u-v)^2} dv \right) du \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2} \int_0^{\frac{x}{2}} \left( \int_0^u e^{-(u-v)^2} dv \right) du \\ &\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x}{2}} e^{-(v-\frac{x}{2})^2} dv \end{aligned}$$

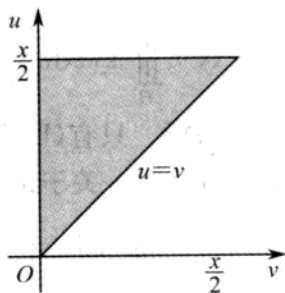


图 7.13

$$\left( \text{令 } v - \frac{x}{2} = t \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} \int_{-\frac{x}{2}}^0 e^{-t^2} dt$$

$$\stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{4}x^2} = \frac{1}{4}.$$

**例 7.14** 设  $f(u)$  在  $[0, t]$  上连续,

$$f(t) = 1 + \iint_D f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}\right) dx dy,$$

其中  $D: x^2 + y^2 \leq 4t^2$ , 试求  $f(t)$ .

**解析** 采用极坐标系,

$$f(t) = 1 + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} f\left(\frac{\rho}{2}\right) \rho d\rho = 1 + 2\pi \int_0^{2t} f\left(\frac{\rho}{2}\right) \rho d\rho,$$

两边求导数得

$$f'(t) = 4\pi f(t) \cdot 2t = 8\pi t f(t),$$

这是变量可分离的微分方程,易于求得

$$f(t) = Ce^{4\pi t^2},$$

由于  $f(0)=1$ , 故  $C=1$ , 于是  $f(t)=e^{4\pi t^2}$ .

**例 7.15** 设  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, z \geq 0$ ;  $\Omega_1$  为  $\Omega$  的位于第一卦限的部分, 则下列等式中正确的是( ).

- (A)  $\iiint_{\Omega} x dv = 4 \iiint_{\Omega_1} x dv$       (B)  $\iiint_{\Omega} xy dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xy dv$   
 (C)  $\iiint_{\Omega} xyz dv = 4 \iiint_{\Omega_1} xyz dv$       (D)  $\iiint_{\Omega} z dv = 4 \iiint_{\Omega_1} z dv$

**解析** 只有(D)是正确的. 这是因为区域  $\Omega$  关于  $x=0$  对称, 函数  $x, xy, xyz$  关于  $x$  皆为奇函数, 所以

$$\iiint_{\Omega} x dv = 0, \quad \iiint_{\Omega} xy dv = 0, \quad \iiint_{\Omega} xyz dv = 0;$$

由于函数  $x$  连续, 在第一卦限中  $x > 0$ , 所以

$$\iiint_{\Omega_1} x dv > 0,$$

同理  $\iiint_{\Omega_1} xy dv > 0, \iiint_{\Omega_1} xyz dv > 0$ . (A), (B), (C) 被否定了, 作为单项选择题, 只能选(D) 正确.

下面证明(D). 记  $\Omega_2$  为区域  $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, z \geq 0$ . 由于  $\Omega$  关于  $x=0$  对称, 函数  $z$  关于  $x$  为偶函数, 故

$$\iiint_{\Omega} z dv = 2 \iiint_{\Omega_2} z dv;$$

由于  $\Omega_2$  关于  $y=0$  对称, 函数  $z$  关于  $y$  为偶函数, 故

$$\iiint_{\Omega_2} z dv = 2 \iiint_{\Omega_1} z dv;$$

于是

$$\iiint_{\Omega} z dv = 2 \iiint_{\Omega_2} z dv = 4 \iiint_{\Omega_1} z dv.$$

**例 7.16** 设  $\Omega: x^2 + y^2 \leq 2az, x^2 + y^2 + z^2 \leq 3a^2$  ( $a > 0$ ), 计算积分

$$\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz.$$

**解析**

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz + \\ &\quad 2 \iiint_{\Omega} (yz + zx + xy) dx dy dz, \end{aligned}$$

由于  $yz + xy$  与  $zx$  分别关于  $y$  与  $x$  为奇函数, 且区域  $\Omega$  分别关于  $y = 0$  与  $x = 0$  皆对称, 所以上式第二项积分值为零. 对于第一项采用柱坐标计算, 因曲面  $x^2 + y^2 = 2az$  与  $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$  的交线位于平面  $z = a$  上, 用垂直于  $z$  轴的平面截  $\Omega$ , 其截面为

$$D_1(z) = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{2az}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

或

$$D_2(z) = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq \sqrt{3a^2 - z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2az}} (\rho^2 + z^2) \rho d\rho + \\ &\quad \int_a^{\sqrt{3}a} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} (\rho^2 + z^2) \rho d\rho \\ &= 2\pi \int_0^a \left( \frac{1}{4} \rho^4 + z^2 \frac{1}{2} \rho^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{2az}} dz + \\ &\quad 2\pi \int_a^{\sqrt{3}a} \left( \frac{1}{4} \rho^4 + z^2 \frac{1}{2} \rho^2 \right) \Big|_0^{\sqrt{3a^2 - z^2}} dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\pi \int_0^a (a^2 z^2 + a z^3) dz + 2\pi \int_a^{\sqrt{3}a} \left( \frac{9}{4} a^4 - \frac{1}{4} z^4 \right) dz \\
 &= \frac{1}{5} \pi a^5 \left( 18\sqrt{3} - \frac{97}{6} \right).
 \end{aligned}$$

**例 7.17** 设区域  $\Omega$  为  $0 \leq z \leq t, x^2 + y^2 \leq t^2 (t > 0)$ , 函数  $f(u)$  可导,  $f(0) = 0$ , 若

$$F(t) = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2) dv,$$

试求  $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t^5} F(t)$ .

**解析** 采用柱坐标系计算  $F(t)$  得

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t d\rho \int_0^t f(\rho^2) \rho dz = 2\pi \int_0^t \rho f(\rho^2) d\rho.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{F(t)}{t^5} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2\pi \int_0^t \rho f(\rho^2) d\rho}{t^4} \\
 &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2\pi t f(t^2)}{4t^3} = \frac{\pi}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t^2) - f(0)}{t^2} \\
 &= \frac{\pi}{2} f'(0).
 \end{aligned}$$

**例 7.18** 设区域  $\Omega$  为由  $x^2 + y^2 + z^2 \leq z, x^2 + y^2 \leq z^2$  所围的区域, 试求

$$\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv.$$

**解析** 采用球坐标系计算,  $x^2 + y^2 + z^2 = z$  的球坐标方程为  $r = \cos \varphi$ ,  $x^2 + y^2 = z^2$  的球坐标方程  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , 于是

$$\text{原式} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cdot \frac{1}{5} \cos^5 \varphi d\varphi$$

$$= -\frac{1}{15}\pi \cos^6 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{7}{120}\pi.$$

例 7.19 设  $f(u)$  在  $u=0$  可导,  $f(0)=0$ , 求

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dv,$$

其中  $\Omega$  为  $x^2+y^2+z^2 \leq 2tz$ .

解析 首先采用球坐标系将三重积分化简,

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2t} dr \int_0^{\arccos \frac{r}{2t}} f(r) r^2 \sin \varphi d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{2t} f(r) r^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\arccos \frac{r}{2t}} dr \\ &= 2\pi \int_0^{2t} f(r) r^2 \left(1 - \frac{r}{2t}\right) dr. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2}{t^4} \left( \int_0^{2t} r^2 f(r) dr - \frac{1}{2t} \int_0^{2t} r^3 f(r) dr \right) \\ &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2}{4t^3} (2 \cdot 4t^2 f(2t)) - \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{5t^4} (2 \cdot 8t^3 f(2t)) \\ &= 8 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2t) - f(0)}{2t} - \frac{32}{5} \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(2t) - f(0)}{2t} \\ &= 8f'(0) - \frac{32}{5}f'(0) = \frac{8}{5}f'(0). \end{aligned}$$

例 7.20 计算  $\iiint_{\Omega} (x+y+z) dv$ ,  $\Omega: x^2+y^2+z^2 \leq x$ .

解析 积分区域  $\Omega$  关于  $y=0$  对称, 函数  $y$  关于  $y$  为奇函数; 积分区域  $\Omega$  关于  $z=0$  对称, 函数  $z$  关于  $z$  为奇函数, 于是

$$\iiint_{\Omega} y dv = 0, \quad \iiint_{\Omega} z dv = 0,$$

故原式 =  $\iiint_{\Omega} x dv$ . 以  $x$  轴正向为  $\varphi=0$  作球坐标系, 则

$$\begin{cases} y = r \sin \varphi \cos \theta, \\ z = r \sin \varphi \sin \theta, \\ x = r \cos \varphi, \end{cases}$$

$dv = r^2 \sin \varphi \, dr d\varphi d\theta$ , 球面  $x^2 + y^2 + z^2 = x$  的球坐标方程化为  $r = \cos \varphi$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iiint_{\Omega} x dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} r \cos \varphi \cdot r^2 \sin \varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} \cos^3 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = -\frac{\pi}{12} \cos^6 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

**例 7.21** 设  $\Omega$  为  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ . 计算

$$\iiint_{\Omega} \exp \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} \, dx dy dz.$$

**解析** 采用广义球坐标变换

$$x = ar \sin \varphi \cos \theta, \quad y = br \sin \varphi \sin \theta, \quad z = cr \cos \varphi,$$

则  $|J| = abcr^2 \sin \varphi$ ,  $dv = abcr^2 \sin \varphi \, dr d\varphi d\theta$ , 于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 e^r abcr^2 \sin \varphi \, dr \\ &= 4\pi abc \int_0^1 e^r r^2 \, dr \\ &= 4\pi abc e^r (r^2 - 2r + 2) \Big|_0^1 \\ &= 4\pi abc (e - 2). \end{aligned}$$

**例 7.22** 设  $f(x)$  为连续的奇函数, 且是周期为 1 的周期函数,

$\int_0^1 x f(x) dx = 1$ , 若

$$F(x) = \int_0^x dv \int_0^v du \int_0^u f(t) dt,$$



试将  $F(x)$  表示为定积分形式, 并求  $F'(1)$ .

**解析** 逐次变换二次积分顺序的方法(参见图 7.14),

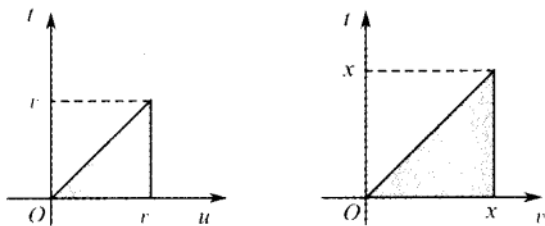


图 7.14

$$\begin{aligned}\int_0^v du \int_0^u f(t) dt &= \int_0^v dt \int_t^v f(t) du = \int_0^v (v-t) f(t) dt, \\ F(x) &= \int_0^x dv \int_0^v (v-t) f(t) dt = \int_0^x dt \int_t^x (v-t) f(t) dv \\ &= \int_0^x \frac{1}{2} (v-t)^2 f(t) \Big|_t^x dt = \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 f(t) dt.\end{aligned}$$

为了求  $F'(x)$ , 先将  $F(x)$  展开为

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^x t f(t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x t^2 f(t) dt,$$

于是

$$\begin{aligned}F'(x) &= x \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{2} x^2 f(x) - \int_0^x t f(t) dt - \\ &\quad x \cdot x f(x) + \frac{1}{2} x^2 f(x) \\ &= x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt,\end{aligned}$$

令  $x=1$  即得

$$\begin{aligned}F'(1) &= \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt \\ &= \int_0^1 f(x) dx - 1.\end{aligned}$$

由于  $f(x)$  是奇函数, 有  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ ; 由于  $f(x)$  是周期为 1 的周期函数, 有

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx,$$

故有  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 于是  $F'(1) = 0 - 1 = -1$ .

**例 7.23** 求由  $x^2 + y^2 + 2z = 4$ ,  $x + y + z = 2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  所围立体的体积.

**解析** 设曲面  $x^2 + y^2 + 2z = 4$  与  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  所围的立体为  $\Omega_1$ ;  $x + y + z = 2$  与  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  所围的立体为  $\Omega_2$ . 则  $\Omega_2$  为四面体, 其体积易于求出为  $V_2 = \frac{4}{3}$ . 下面求立体  $\Omega_1$  的体积  $V_1$ ,

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_D \left( 2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \left( 2 - \frac{1}{2}\rho^2 \right) \rho d\rho \\ &= \frac{\pi}{2} \left( \rho^2 - \frac{1}{8}\rho^4 \right) \Big|_0^2 = \pi. \end{aligned}$$

于是所求立体体积为

$$V = V_1 - V_2 = \pi - \frac{4}{3}.$$

**例 7.24** 半径为  $R$  的球面  $\Sigma$  的球心在定球面  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 上, 问  $R$  取何值时,  $\Sigma$  在定球面内的那部分面积最大?

**解析** 不妨设球面  $\Sigma$  的球心在点  $(0, 0, a)$ , 则  $\Sigma$  的方程为  $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = R^2$ , 欲球面  $\Sigma$  能有位于定球面内的曲面部分 (记为  $\Sigma_1$ ), 必须  $0 < R < 2a$ . 两球面的交线在  $xy$  平面上的投影  $\Gamma$  为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 - \frac{1}{4a^2}R^4, \\ z = 0. \end{cases}$$

$\Gamma$  所包围的平面区域记为  $D$ , 则所求曲面  $\Sigma_1$  的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy \quad (z = a - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}) \\
 &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= R \iint_D \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \quad (\text{记 } A = \frac{R}{2a} \sqrt{4a^2 - R^2}) \\
 &= R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^A \frac{\rho}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho = -2\pi R \sqrt{R^2 - \rho^2} \Big|_0^A \\
 &= 2\pi R^2 - \frac{1}{a} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

欲求  $S$  的最大值, 令  $S' = 4\pi R - \frac{3}{a} \pi R^2 = 0$ , 解得驻点  $R = \frac{4}{3}a$

( $R = 0$  不合题意), 由于  $S''(\frac{4}{3}a) = -4\pi < 0$ , 所以当  $R = \frac{4}{3}a$  时, 球

面  $\Sigma$  在定球面内的部分曲面的面积最大.

**例 7.25** 求旋转抛物面  $z = 1 + x^2 + y^2$  被旋转抛物面  $z = 2(x^2 + y^2)$  截下的部分曲面的面积.

**解析** 两曲面的交线在  $xy$  平面上的投影为  $x^2 + y^2 = 1$ , 设  $D$  为圆域  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 则所求曲面的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy.$$

由于  $z = 1 + x^2 + y^2$ ,  $z'_x = 2x$ ,  $z'_y = 2y$ , 代入上式并采用极坐标计算得

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} \rho d\rho = \frac{2\pi}{8} \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2} d(1+4\rho^2) \\
 &= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{3} (1+4\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5\sqrt{5} - 1).
 \end{aligned}$$

**例 7.26** 求柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  被锥面  $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$  与  $xy$  平面所截部分曲面的面积.

**解析** 设柱面  $x^2 + y^2 = 2x$  被锥面  $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}$  与  $xy$  平面所截的部分曲面为  $\Sigma$ , 则  $\Sigma$  关于  $y=0$  对称, 且  $\Sigma$  在  $zx$  平面上投影为

$$D = \left\{ (z, x) \mid 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2 \right\},$$

于是  $\Sigma$  的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \iint_D \sqrt{1 + y_z'^2 + y_x'^2} dz dx = 2 \iint_D \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dz dx \\ &= 2 \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{\frac{x}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}} dz = 2 \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 - x}} dx \\ &= -\frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{2 - x} \Big|_0^2 = 4. \end{aligned}$$

**例 7.27** 设有一半径为  $R$  的球体,  $P_0$  是此球的表面上的一个定点, 球体内任一点的密度与该点到  $P_0$  的距离平方成正比 (比例常数  $k > 0$ ), 求球体的重心位置.

**解析**

**方法 I** 记所考虑的球体为  $\Omega$ , 以  $\Omega$  的球心为原点  $O$ , 射线  $OP_0$  为正  $x$  轴建立直角坐标系 (如图 7.15), 则点  $P_0$  的坐标为  $(R, 0, 0)$ , 球体  $\Omega$  的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

设  $\Omega$  的重心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 由对称性, 得

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 0,$$

$$\bar{x} = \frac{\iiint_{\Omega} x \cdot k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dv}{\iiint_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dv}.$$

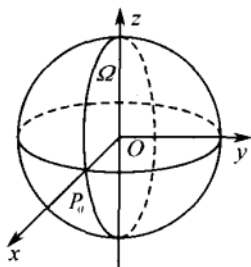


图 7.15

由于  $\Omega$  关于  $x=0$  对称,  $2Rx$  关于  $x$  为奇函数,  $x[x^2+y^2+z^2+R^2]$  关于  $x$  为奇函数, 所以

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} [(x-R)^2 + y^2 + z^2] dv &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv + \iiint_{\Omega} R^2 dv \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr + \frac{4}{3} \pi R^5 \\ &= \frac{32}{15} \pi R^5, \\ \iiint_{\Omega} x[(x-R)^2 + y^2 + z^2] dv &= -2R \iiint_{\Omega} x^2 dv \\ &= -\frac{2R}{3} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv = -\frac{2R}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= -\frac{8}{15} \pi R^6, \end{aligned}$$

故

$$\bar{x} = -\frac{R}{4}.$$

因此, 球体  $\Omega$  的重心位置为  $(-\frac{R}{4}, 0, 0)$ .

**方法 II** 设所考虑的球体为  $\Omega$ , 球心为  $\tilde{O}$ , 以定点  $P_0$  为原点, 射线  $P_0\tilde{O}$  为正  $z$  轴建立直角坐标系 (如图 7.16), 则球体  $\Omega$  的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz.$$

设  $\Omega$  的重心位置为  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , 由对称性, 得

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 0, \quad \bar{y} = 0, \\ \bar{z} &= \frac{\iiint_{\Omega} kz(z^2 + y^2 + x^2) dv}{\iiint_{\Omega} k(x^2 + y^2 + z^2) dv}, \end{aligned}$$

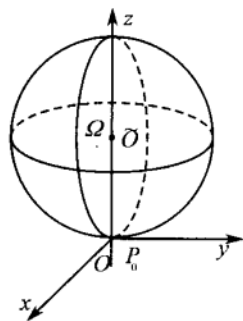


图 7.16

由于

$$\begin{aligned}
 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^4 \sin\varphi dr \\
 &= \frac{32}{15} \pi R^5, \\
 \iiint_{\Omega} z(x^2 + y^2 + z^2) dv &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r^5 \sin\varphi \cos\varphi dr \\
 &= \frac{64}{3} \pi R^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi \\
 &= \frac{8}{3} \pi R^6,
 \end{aligned}$$

故

$$\bar{z} = \frac{5}{4} R.$$

因此,球体  $\Omega$  的重心位置为  $(0, 0, \frac{5}{4}R)$ .

**评注** 在上述方法 I 的计算过程中用到下列公式:当区域  $\Omega$  关于  $x=0$  对称时,若  $f(x, y, z)$  关于  $x$  为奇函数,则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = 0.$$

**例 7.28** 设有一高度为  $h(t)$  ( $t$  为时间)的雪堆在融化过程中,其上表面满足方程  $z = h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)}$  (设长度单位为 cm, 时间单位为 h), 已知雪堆体积减少的速率与上表面积成正比 (比例系数 0.9), 问高度为 130(cm) 的雪堆全部融化需多少小时?

**解析** 记  $V$  为雪堆体积,  $S$  为雪堆的上表面积, 其上表面在  $xy$  平面上投影为

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \frac{1}{2}h^2(t) \right\},$$

则

$$\begin{aligned} V &= \iint_D z \, dx \, dy = \iint_D \left[ h(t) - \frac{2(x^2 + y^2)}{h(t)} \right] dx \, dy \\ &= \frac{1}{2} \pi h^3(t) - \frac{2}{h(t)} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h(t)} \rho^3 \, d\rho \\ &= \frac{1}{2} \pi h^3(t) - \frac{2}{h(t)} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sqrt{2}}h(t) \right)^4 \\ &= \frac{1}{4} \pi h^3(t), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} \, dx \, dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}} \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h(t)} \frac{1}{h(t)} \sqrt{h^2(t) + 16\rho^2} \, \rho \, d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{h(t)} (h^2(t) + 16\rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}h(t)} = \frac{13}{12} \pi h^2(t), \end{aligned} \quad (2)$$

由题意有

$$\frac{dV}{dt} = -0.9S, \quad (3)$$

将(1),(2)两式代入(3)得

$$\frac{\pi}{4} \cdot 3h^2(t) \frac{d}{dt}h(t) = -0.9 \cdot \frac{13}{12} \pi h^2(t),$$

化简得

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\frac{13}{10},$$

积分得

$$h(t) = -\frac{13}{10}t + C,$$

由  $h(0)=130$ , 代入上式得  $C=130$ , 于是



$$h(t) = -\frac{13}{10}t + 130,$$

令  $h(t)=0$  得

$$t = 100(\text{h}),$$

因此高度为 130cm 的雪堆全部融化所需时间为 100h.

**例 7.29** 设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上导数连续,  $f(a)=0$ , 求证

$$\int_a^b f^2(x) dx \leq \frac{1}{2} \int_a^b ((b-a)^2 - (x-a)^2) f'^2(x) dx.$$

**解析** 因  $f'(x)$  连续,  $f(a)=0$ , 故

$$\int_a^x f'(x) dx = f(x) - f(a) = f(x),$$

应用施瓦兹不等式(参见例 4.26)得

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left( \int_a^x f'(x) dx \right)^2 \leq \int_a^x 1^2 dx \cdot \int_a^x f'^2(x) dx \\ &= (x-a) \int_a^x f'^2(x) dx \\ &= (x-a) \int_a^x f'^2(t) dt. \end{aligned}$$

应用定积分的保向性, 上式两端积分得

$$\begin{aligned} \int_a^b f'^2(x) dx &\leq \int_a^b dx \int_a^x (x-a) f'^2(t) dt \quad (\text{交换积分次序}) \\ &= \int_a^b dt \int_t^b (x-a) f'^2(t) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f'^2(t) (x-a)^2 \Big|_t^b dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b ((b-a)^2 - (t-a)^2) f'^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b ((b-a)^2 - (x-a)^2) f'^2(x) dx. \end{aligned}$$



## 8

## 曲线积分与曲面积分

## 8.1 基本概念与内容提要

## 1) 空间曲线弧长的定义和计算

设  $\widehat{AB} \subset \mathbf{R}^3$  为连续曲线, 其参数方程为

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \omega(t),$$

$t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\widehat{AB}$  与  $[\alpha, \beta]$  的点一一对应, 函数  $\varphi, \psi, \omega : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$  连续可导, 则曲线  $\widehat{AB}$  可求长, 且弧长为

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt.$$

## 2) 第一型(对弧长的)曲线积分的定义和计算

设  $\widehat{AB} \subset \mathbf{R}^3$  为可求长的连续曲线, 函数  $f : \widehat{AB} \rightarrow \mathbf{R}$ , 将  $\widehat{AB}$  任意地分割为  $n$  个小弧段  $\widehat{A_{i-1}A_i}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 设其弧长为  $\Delta l_i$ , 直径为  $d_i$ , 在此弧段上任取点  $(x_i, y_i, z_i)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 则  $f$  沿  $\widehat{AB}$  的第一型曲线积分定义为

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta l_i,$$

这里  $\lambda = \max_i(d_i)$ , 且右边有有限极限.

\* 假设  $\widehat{AB} \subset \mathbf{R}^3$  为连续曲线, 其参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t),$$

$t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\widehat{AB}$  与  $[\alpha, \beta]$  的点一一对应, 函数  $\varphi, \psi, \omega : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ , 连续可导, 且  $f : \widehat{AB} \rightarrow \mathbf{R}$  连续, 则  $f$  沿  $\widehat{AB}$  的第一型曲线积分存在, 且

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) dl = \int_a^\beta f(t) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\omega'(t)]^2} dt,$$

这里  $f(t) = f(\varphi(t), \psi(t), \omega(t))$ .

### 3) 第二型(对坐标的)曲线积分的定义和计算

设  $\widehat{AB} \subset \mathbf{R}^3$  为光滑曲线,  $\widehat{AB}$  顺向的单位切向量为  $\tau^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ , 函数  $P, Q, R: \widehat{AB} \rightarrow \mathbf{R}$ , 将  $\widehat{AB}$  任意地分割为  $n$  个小弧段, 设其弧长为  $\Delta l_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 直径为  $d_i$ , 在其上任取点  $M_i$ , 记

$$\tau_i^0 = \tau^0(M_i) = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i),$$

$$\Delta x_i = \Delta l_i \cos \alpha_i, \quad \Delta y_i = \Delta l_i \cos \beta_i, \quad \Delta z_i = \Delta l_i \cos \gamma_i,$$

则函数  $P, Q, R$  沿  $\widehat{AB}$  从  $A$  到  $B$  的第二型曲线积分定义为

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i + \\ &\quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta y_i + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta z_i, \end{aligned}$$

这里  $\lambda = \max_i(d_i)$ , 且上式右边的三项皆有有限极限.

在上述定义中, 若函数  $P, Q, R: \widehat{AB} \rightarrow \mathbf{R}$  连续, 则  $P, Q, R$  沿  $\widehat{AB}$  从  $A$  到  $B$  的第二型曲线积分存在, 且有计算公式

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz = \int_{\widehat{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl,$$

此式还展示了第一型曲线积分与第二型曲线积分之间的关系.

\* 进一步, 若设  $\widehat{AB}$  的参数方程为

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t),$$

$t \in [\alpha, \beta]$ ,  $\widehat{AB}$  与  $[\alpha, \beta]$  的点一一对应, 函数  $\varphi(t), \psi(t), \omega(t)$  在  $[a, b]$  上连续可导, 则有计算公式

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz &= \begin{cases} \int_a^\beta (P(t)\varphi'(t) + Q(t)\psi'(t) + R(t)\omega'(t)) dt, \\ \int_\beta^\alpha (P(t)\varphi'(t) + Q(t)\psi'(t) + R(t)\omega'(t)) dt, \end{cases} \end{aligned}$$

这里右端的第一式为  $t$  增大时对应的点从  $A$  到  $B$ ; 第二式为  $t$  增大时对应的点从  $B$  到  $A$ , 且

$$\begin{aligned} P(t) &= P(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)), \quad Q(t) = Q(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)), \\ R(t) &= R(\varphi(t), \psi(t), \omega(t)). \end{aligned}$$

计算第二型曲线积分的另一方法是, 若存在可微函数  $u(x, y, z) : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\widehat{AB} \subset \Omega$ , 使得

$$du = Pdx + Qdy + Rdz$$

$\forall (x, y, z) \in \Omega$  成立, 则有计算公式

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = u(x, y, z) \Big|_A^B.$$

#### 4) 第一型(对面积的)曲面积分的定义和计算

设  $\Sigma \subset \mathbf{R}^3$  为有界曲面, 函数  $f : \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ , 将  $\Sigma$  任意地分割为  $n$  块小曲面  $\Sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 其面积记为  $\Delta S_i$ ,  $\Sigma_i$  的直径记为  $d_i$ , 在  $\Sigma_i$  上任取点  $(x_i, y_i, z_i)$ , 则  $f$  沿曲面  $\Sigma$  的第一型曲面积分定义为

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i,$$

这里  $\lambda = \max_i (d_i)$ , 且上式右边有有限极限.

\* 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ ,  $D$  为  $xy$  平面上的有界闭域, 函数  $z$  在  $D$  上连续可微, 函数  $f$  在  $\Sigma$  上连续, 则  $f$  沿曲面  $\Sigma$  的第一型曲面积分存在, 且有计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy;$$

若曲面  $\Sigma$  的方程为  $x = x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_y$ ,  $D_y$  为  $yz$  平面上的有界闭域, 则有与上式对应的化为  $D_y$  上的二重积分的计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_y} f(x(y, z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dy dz;$$

若曲面  $\Sigma$  的方程为  $y = y(z, x)$ ,  $(z, x) \in D_z$ ,  $D_z$  为  $zx$  平面上的

有界闭域,则有与上式对应的化为  $D_{xz}$  上的二重积分的计算公式

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \iint_{D_{xz}} f(x, y(z, x), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} dz dx.$$

### 5) 第二型(对坐标的)曲面积分的定义和计算

设  $\Sigma$  为光滑的(即其法向量连续地变化)双侧曲面,  $\Sigma$  某侧的单位法向量为

$$\mathbf{n}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

函数  $P, Q, R: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$ , 将  $\Sigma$  任意地分割为  $n$  块小曲面  $\Sigma_i (i=1, 2, \dots, n)$ , 设其面积为  $\Delta S_i$ , 直径为  $d_i$ ,  $\lambda = \max\{d_i | i=1, 2, \dots, n\}$ , 在曲面  $\Sigma_i$  上任取点  $M_i$ , 记

$$\mathbf{n}_i^0 = \mathbf{n}^0(M_i) = (\cos \alpha_i, \cos \beta_i, \cos \gamma_i).$$

$$\Delta \sigma_{yz} = \Delta S_i \cos \alpha_i, \quad \Delta \sigma_{zx} = \Delta S_i \cos \beta_i, \quad \Delta \sigma_{xy} = \Delta S_i \cos \gamma_i,$$

则函数  $P, Q, R$  沿曲面  $\Sigma$  某侧的第二型曲面积分定义为

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma \text{ 某侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ & \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta \sigma_{yz} + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n Q(M_i) \Delta \sigma_{zx} + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(M_i) \Delta \sigma_{xy}, \end{aligned}$$

这里假设右端的三个和式在  $\lambda \rightarrow 0$  时皆有有限极限.

\* 在上述定义中,若函数  $P, Q, R: \Sigma \rightarrow \mathbf{R}$  连续,则函数  $P, Q, R$  沿曲面  $\Sigma$  某侧的第二型曲面积分存在,且有计算公式

$$\iint_{\Sigma \text{ 某侧}} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS,$$

此式还展示了第一型曲面积分与第二型曲面积分之间的关系.

\* 第二型曲面积分的计算(统一投影法与分项投影法):

(1) 若曲面  $\Sigma$  的方程为  $z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ , 则

$$\iint_{\Sigma \text{ 某侧}} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy,$$

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{xy}} P(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) dx dy,$$

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xy}} Q(x, y, z(x, y)) \left(-\frac{\partial z}{\partial y}\right) dx dy,$$

这里右端的±号的选取为:上侧取+,下侧取-(设 $z$ 轴正向向上).

(2) 若曲面 $\Sigma$ 的方程为 $x=x(y, z)$ ,  $(y, z) \in D_{yz}$ , 则

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz,$$

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{yz}} Q(x(y, z), y, z) \left(-\frac{\partial x}{\partial y}\right) dy dz,$$

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{yz}} R(x(y, z), y, z) \left(-\frac{\partial x}{\partial z}\right) dy dz,$$

这里右端的±号的选取为:前侧取+,后侧取-(设 $x$ 轴正向向前).

(3) 若曲面 $\Sigma$ 的方程为 $y=y(z, x)$ ,  $(z, x) \in D_{zx}$ , 则

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx,$$

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{zx}} R(x, y(z, x), z) \left(-\frac{\partial y}{\partial z}\right) dz dx,$$

$$\iint_{\Sigma \text{某侧}} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{zx}} P(x, y(z, x), z) \left(-\frac{\partial y}{\partial x}\right) dz dx,$$

这里右端的±号的选取为:右侧取+,左侧取-(设 $y$ 轴正向向右).

## 6) 线积分、面积分、体积分间的联系

(1) \* 格林定理.

设 $D$ 为 $xy$ 平面上的有界闭域, $D$ 的边界曲线 $\Gamma$ 逐段光滑,取正向 $\Gamma^+$ ,函数 $P, Q: D \rightarrow \mathbf{R}$ 连续可微,则有

$$\oint_{\Gamma^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

(2) \* 平面的曲线积分与路线无关的充要条件.

设  $G$  是  $xy$  平面上的单连通域,  $P, Q$  在  $G$  上连续可微, 则下列四个陈述相互等价:

$$(i) \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \forall (x, y) \in G;$$

$$(ii) \int_A^B P dx + Q dy \text{ 与路线无关}, \forall A, B \in G;$$

$$(iii) \oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0, \forall \Gamma \subset G;$$

(iv)  $\exists u(x, y)$  可微, 使得  $du = P dx + Q dy$ , 且

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C,$$

或

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy + C,$$

这里  $(x_0, y_0), (x, y) \in G$ .

(3) 斯托克斯定理.

设  $\Sigma$  是逐段光滑的单闭曲线  $\Gamma$  所包围的非封闭的光滑双侧曲面, 取某定侧  $\Sigma^+$ , 按右旋法则确定  $\Gamma$  的正向  $\Gamma^+$ ,  $\Omega$  是空间的立体区域, 使得  $\Sigma \subset \Omega$ , 函数  $P, Q, R: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  连续可微, 则有

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma^+} P dx + Q dy + R dz \\ &= \iint_{\Sigma^+} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

(4) 空间的曲线积分与路线无关的充要条件.

设  $G$  是空间的面单连通开域,  $P, Q, R$  在  $G$  上连续可微, 则下列四个陈述相互等价:

$$(i) \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \forall (x, y, z) \in G;$$

(ii)  $\int_A^B Pdx + Qdy + Rdz$  与路线无关,  $\forall A, B \in G$ ;

(iii)  $\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0, \quad \forall \Gamma \subset G$ ;

(iv)  $\exists u(x, y, z)$  可微, 使得

$$du = Pdx + Qdy + Rdz,$$

且

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y_0, z_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y, z_0) dy + \int_{z_0}^z R(x, y, z) dz + C,$$

或

$$u(x, y, z) = \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz + C.$$

这里  $(x_0, y_0, z_0), (x, y, z) \in G$ .

(5) \* 高斯定理.

设  $\Omega$  是空间的有界闭域, 其边界是逐片光滑的封闭曲面  $\Sigma$ , 取外侧, 函数  $P, Q, R: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  连续可微, 则有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} P dydz + Q dzdx + R dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv. \end{aligned}$$

(6) 曲面积分与曲面无关的充要条件.

设  $\Omega$  为空间的体单连通域,  $P, Q, R: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  连续可微, 曲面  $\Sigma \subset \Omega$ , 则曲面积分

$$\iint_{\Sigma^+} P dydz + Q dzdx + R dx dy$$

与曲面  $\Sigma$  无关 (即设  $\Gamma$  是逐段光滑的单闭曲线, 取方向  $\Gamma^+$ ,  $\Sigma$  是任意

的以  $\Gamma$  为边界的非封闭的双侧曲面,  $\Sigma^+$  与  $\Gamma^+$  服从右旋规则) 的充要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

### 7) 奇函数、偶函数的曲线积分和曲面积分

(1) 若  $f(x, y, z)$  在曲线  $\Gamma$  上的第一型曲线积分存在,  $f$  关于  $x$  为奇函数或偶函数,  $\Gamma$  关于  $x = 0$  对称, 则

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) dl = \begin{cases} 0, & \text{当 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数,} \\ 2 \int_{\Gamma_1} f(x, y, z) dl, & \text{当 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数,} \end{cases}$$

这里  $\Gamma_1$  是  $\Gamma$  的  $x \geq 0$  部分.

(2) 若  $f(x, y, z)$  在曲面  $\Sigma$  上的第一型曲面积分存在,  $f$  关于  $x$  为奇函数或偶函数,  $\Sigma$  关于  $x = 0$  对称, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \begin{cases} 0, & \text{当 } f \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数,} \\ 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS, & \text{当 } f \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数,} \end{cases}$$

这里  $\Sigma_1$  是  $\Sigma$  的  $x \geq 0$  部分.

### 8) 直角坐标系下的梯度、散度和旋度

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla f,$$

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A},$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{A} &= \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ &= \nabla \times \mathbf{A}, \end{aligned}$$

这里  $\mathbf{A} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ,  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ .

### 9) 方向导数

设函数  $f(x, y, z)$  在  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  的某邻域  $U$  内定义,  $l$  为已知



的非零常向量,任取  $P \in U$ ,使得  $\overrightarrow{P_0P}$  与  $l$  方向相同,则  $f$  在点  $P_0$  沿  $l$  方向的方向导数定义为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|P_0P|} = A \quad (A \in \mathbf{R}).$$

若函数  $f(x, y, z)$  在  $(x, y, z)$  可微,向量  $l$  的方向余弦为  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , 则  $f(x, y, z)$  在点  $(x, y, z)$  沿  $l$  方向的方向导数存在,且有计算公式:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(x, y, z) \cos \alpha + f'_y(x, y, z) \cos \beta + f'_z(x, y, z) \cos \gamma.$$

应用梯度概念,上式可写为

$$\frac{\partial f}{\partial l} = (\text{grad } f) \cdot l^0 = |\text{grad } f| \cos \theta,$$

这里  $\theta$  为  $\text{grad } f$  与  $l$  的夹角,当  $\theta=0$  时,  $\frac{\partial f}{\partial l}$  取最大值  $|\text{grad } f|$ , 这表明函数  $f(x, y, z)$  沿  $\text{grad } f$  方向的方向导数取最大值,其值等于  $|\text{grad } f|$ .

### 10) \* 有势场与势函数

若向量函数

$$\mathbf{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

定义在区域  $G \subseteq \mathbf{R}^3$  上. 若  $\forall (x, y, z) \in G$  有  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$ , 称  $\mathbf{A}$  为无旋场, 又称  $\mathbf{A}$  为有势场或保守场.

(1) 向量场  $\mathbf{A}$  为有势场的充要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y};$$

(2) 向量场  $\mathbf{A}$  为有势场的充要条件是存在势函数  $u(x, y, z)$ , 使得

$$\mathbf{A} = \text{grad } u,$$

$$\Leftrightarrow du = Pdx + Qdy + Rdz.$$

## 8.2 典型习题与试题解析

**例 8.1** 设  $l$  为椭圆  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ , 其周长记为  $a$ , 求

$$\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) dl.$$

**解析** 曲线积分(两种类型)是沿着曲线  $l$  的积分, 所以曲线  $l$  的方程可代入被积表达式, 因  $3x^2 + 4y^2 = 12$ , 所以

$$\text{原式} = \oint_l (2xy + 12) dl = \oint_l 2xy dl + 12 \oint_l dl = \oint_l 2xy dl + 12a,$$

由于被积函数  $2xy$  关于  $x$  为奇函数, 曲线  $l$  关于  $x = 0$  对称, 则  $\oint_l 2xy dl = 0$ , 所以

$$\text{原式} = 0 + 12a = 12a.$$

**例 8.2** 求  $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dl$ , 其中  $\Gamma: x^2 + y^2 = ax$ .

**解析** 方法 I 取  $\Gamma$  的参数方程

$$x = \rho \cos \theta = a \cos^2 \theta,$$

$$y = \rho \sin \theta = a \sin \theta \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

则

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= ax = a^2 \cos^2 \theta, \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} \\ &= \sqrt{a^2 \sin^2 2\theta + a^2 \cos^2 2\theta} = a, \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dl &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta \cdot \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^3 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \end{aligned}$$

$$= a^3 \left( \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \pi a^3.$$

方法 II 取  $\Gamma$  的参数方程

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{a}{2} \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

则

$$x^2 + y^2 = ax = \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta),$$

$$\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} \sin^2 \theta + \frac{a^2}{4} \cos^2 \theta} = \frac{a}{2},$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2) dl &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} a^2 (1 + \cos \theta) \frac{a}{2} d\theta \\ &= \frac{1}{4} a^3 (\theta + \sin \theta) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \pi a^3. \end{aligned}$$

例 8.3 设  $\Gamma$  是  $y = x^2, x = y^2$  所围区域边界曲线的正向. 计算

$$\oint_{\Gamma} (2xy - x^2) dx + (x + y^2) dy.$$

解析 方法 I 如图 8.1,  $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ ,  $A$  的坐标为  $(1, 1)$ ,

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_2} \\ &= \int_0^1 (2x^3 - x^2 + 2x^2 + 2x^5) dx + \\ &\quad \int_1^0 (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy \\ &= \frac{7}{6} - \frac{17}{15} = \frac{1}{30}. \end{aligned}$$

方法 II 应用格林公式,

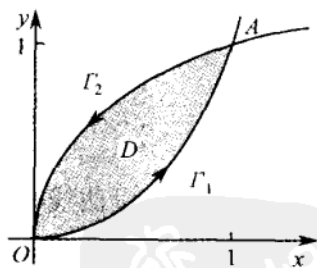


图 8.1

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_D (1-2x) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x) dy \\ &= \int_0^1 (1-2x)(\sqrt{x}-x^2) dx = \frac{1}{30}.\end{aligned}$$

**例 8.4** 设  $\Gamma$  为曲线  $x = \sqrt{2y-y^2}$ , 方向沿  $y$  增大的方向. 计算

$$\int_{\Gamma} (5xy - e^x \sin y) dy + e^x \cos y dx.$$

**解析** 记  $P = e^x \cos y$ ,  $Q = 5xy - e^x \sin y$ , 取  $l$  为  $y$  轴上从  $(0, 2)$  到  $(0, 0)$  的直线段, 记  $\Gamma + l$  所围区域为  $D$  (图 8.2), 则由格林公式得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_l P dx + Q dy \\ &= 5 \iint_D y dx dy - \int_0^2 \sin y dy \\ &= 5 \int_0^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} y dx + \cos y \Big|_0^2 \\ &= 5 \int_0^2 y \sqrt{2y-y^2} dy - 1 + \cos 2 \\ &\quad (\text{令 } y = 1 + \sin \theta)\end{aligned}$$

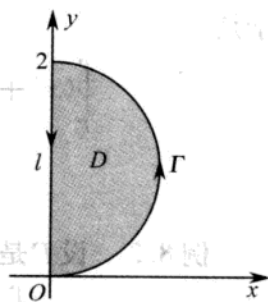


图 8.2

$$\begin{aligned}&= 5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta (1 + \sin \theta) d\theta - 1 + \cos 2 \\ &= \frac{5}{2} \pi - 1 + \cos 2.\end{aligned}$$

**例 8.5** 设曲线积分  $\int_{\Gamma} xy^2 dx + y\varphi(x) dy$  与路径无关,  $\varphi$  连续可导,  $\varphi(0) = 0$ , 求

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + y\varphi(x) dy.$$

**解析** 由题给条件得  $\frac{\partial}{\partial x}(y\varphi(x)) = \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)$ , 即  $\varphi'(x) = 2x$ ,

且  $\varphi(0) = 0$ , 故  $\varphi(x) = x^2$ . 由于  $xy^2 dx + yx^2 dy = d \frac{1}{2} (xy)^2$ , 故

$$\text{原式} = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2 dx + yx^2 dy = \frac{1}{2} (xy)^2 \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = \frac{1}{2}.$$

**例 8.6** 计算曲线积分  $I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$ , 其中  $L$  是以点  $(1, 0)$  为中心,  $R$  为半径的圆周 ( $R > 1$ ), 取逆时针方向.

**解析**  $P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

由于封闭曲线  $L$  包围原点  $(0, 0)$ ,  $P, Q$  在  $(0, 0)$  处不连续, 所以原式

不能直接应用格林公式. 我们作足够小椭圆  $C: \begin{cases} x = \frac{\delta}{2} \cos \theta, \\ y = \delta \sin \theta, \end{cases} \theta \in$

$[0, 2\pi]$ , 使得  $C$  位于  $L$  的内部, 它们所包围的区域记为  $D$ ,  $C$  取顺时针方向. 应用格林公式有

$$\oint_{L+C} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

于是

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = - \oint_C \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2} \delta^2}{\delta^2} d\theta = \pi.$$

**例 8.7** 设函数  $f(x)$  连续可导,  $f(1) = 1$ , 使得曲线积分

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx)$$

恒等于常数  $K$ , 其中  $\Gamma$  为任意的包围原点的封闭曲线, 取正向.

(1) 求证在任何不包含原点的单连通域  $G$  内曲线积分

$$\int_A^B \frac{1}{f(x) + 8y^2} (x dy - y dx) \quad (A, B \in G) \quad (1)$$

与路线无关;

(2) 求函数  $f(x)$  与常数  $K$ .

**解析** (1) 在  $G$  内从  $A$  到  $B$  任取两条路径  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_2$  (如图 8.3); 又取从  $B$  到  $A$  的路径  $\widehat{BNA}$  使得  $\Gamma_1 + \widehat{BNA}$  包围原点,  $\Gamma_2 + \widehat{BNA}$  也包围原点, 记

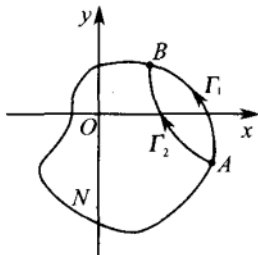


图 8.3

$$P = \frac{-y}{f(x) + 8y^2}, \quad Q = \frac{x}{f(x) + 8y^2},$$

则由题意有

$$\int_{\Gamma_1 + \widehat{BNA}} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2 + \widehat{BNA}} P dx + Q dy = K,$$

于是

$$\int_{\Gamma_1} P dx + Q dy = \int_{\Gamma_2} P dx + Q dy,$$

即曲线积分(1)与路线无关.

(2) 由于曲线积分(1)与路线无关的充要条件是  $P, Q$  在  $G$  上连续可微, 且  $Q'_x = P'_y$ , 由此可得  $xf'(x) = 2f(x)$ , 解此微分方程可得  $f(x) = Cx^2$ , 再由  $f(1) = 1$ , 可得  $C = 1$ , 于是  $f(x) = x^2$ . 由于  $P, Q$  在原点不连续可微, 所以原式不能直接应用格林公式, 作足够小椭圆  $l: x^2 + 8y^2 = \epsilon^2 (\epsilon > 0 \text{ 充分小})$ , 使得  $l$  位于  $\Gamma$  的内部, 它们所包围的区域记为  $D$ ,  $l$  取顺时针方向, 应用格林公式有

$$\oint_{\Gamma+l} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

取  $l$  的参数方程  $x = \epsilon \cos \theta, y = \frac{\epsilon}{\sqrt{8}} \sin \theta, \theta$  从  $2\pi$  减至  $0$ , 于是有

$$K = \int_{\Gamma} P dx + Q dy = - \int_l P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\epsilon^2} \frac{1}{\sqrt{8}} \epsilon^2 d\theta = \frac{1}{2} \sqrt{2} \pi.$$

**例 8.8** 设函数  $f(x)$  的二阶导数连续, 使得曲线积分

$$\int_A^B (f'(x) + 2f(x) + 2x)y^2 dx + f'(x)dy$$

与路线无关,这里  $A, B$  的坐标分别为  $(1, 2), (3, 5)$ , 求  $f(x)$ , 并求该曲线积分的值.

**解析** 记  $P = (f'(x) + 2f(x) + 2x)y^2, Q = f'(x)$ , 因曲线积分与路线无关,其充要条件是  $\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}$ , 即

$$f''(x) \equiv 2(f'(x) + 2f(x) + 2x)y,$$

欲此式恒成立,必须  $f'(x) + 2f(x) + 2x = 0$ , 因而  $f''(x) = 0$ . 由  $f''(x) = 0$  得  $f(x) = C_1x + C_2$ , 代入  $f'(x) + 2f(x) + 2x = 0$  得

$$C_1 + 2C_2 + 2(C_1 + 1)x = 0,$$

解得  $C_1 = -1, C_2 = \frac{1}{2}$ , 因此  $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ , 于是

$$\text{原式} = \int_2^5 -1 dy = -3.$$

**例 8.9** 设  $Q(x, y)$  连续可微, 曲线积分

$$\int_{\Gamma} 3x^2 y dx + Q(x, y) dy$$

与路线无关, 且对一切实数  $t$  恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 3x^2 y dx + Q(x, y) dy = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 3x^2 y dx + Q(x, y) dy,$$

求函数  $Q(x, y)$ .

**解析** 记  $P = 3x^2 y$ , 因曲线积分与路线无关, 其充要条件是  $Q'_x = P'_y = 3x^2$ , 故

$$Q(x, y) = \int 3x^2 dx + \varphi(y) = x^3 + \varphi(y),$$

这里  $\varphi(y)$  为待定可微函数, 又因  $Q'_x = P'_y$  的充要条件是存在可微函数  $u(x, y)$  使得

$$du(x, y) = P dx + Q dy = 3x^2 y dx + (x^3 + \varphi(y)) dy,$$

且

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, y) dx + \int_0^y Q(0, y) dy \\ &= \int_0^x 3x^2 y dx + \int_0^y \varphi(y) dy = x^3 y + \int_0^y \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

由已知条件与第二型曲线积分的计算公式得

$$u(x, y) \bigg|_{(0,0)}^{(t,1)} = u(x, y) \bigg|_{(0,0)}^{(1,t)}$$

即

$$t^3 + \int_0^1 \varphi(y) dy = t + \int_0^t \varphi(y) dy,$$

两边对  $t$  求导得  $3t^2 + 0 = 1 + \varphi(t)$ , 于是  $\varphi(y) = 3y^2 - 1$ , 因此所求函数  $Q(x, y)$  为

$$Q(x, y) = x^3 + 3y^2 - 1.$$

**例 8.10** 在过  $(0, 0)$  与  $(\pi, 0)$  的曲线族  $y = a \sin x (a > 0)$  中求一条曲线  $\Gamma$ , 使得沿  $\Gamma$  从  $(0, 0)$  到  $(\pi, 0)$  的积分

$$I = \int_{\Gamma} (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$$

的值最小.

**解析** 取  $x$  为参数, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} [1 + a^3 \sin^3 x + (2x + a \sin x) a \cos x] dx \\ &= \pi + a^3 \int_0^{\pi} (\cos^2 x - 1) d(\cos x) + 2a \int_0^{\pi} x d(\sin x) + \\ &\quad a^2 \int_0^{\pi} \sin x d(\sin x) \\ &= \pi + a^3 \left( \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x \right) \bigg|_0^{\pi} + 2a (x \sin x + \cos x) \bigg|_0^{\pi} + \\ &\quad \frac{1}{2} a^2 \sin^2 x \bigg|_0^{\pi} \end{aligned}$$



$$= \pi + a^3 \left( \frac{4}{3} \right) + 2a(-2) = \pi - 4a + \frac{4}{3}a^3,$$

由  $\frac{dI}{da} = -4 + 4a^2 = 0$  解得驻点  $a = 1$ , 由于  $I''(1) = 8 > 0$ , 所以当  $a = 1$  时  $I$  的值最小, 于是所求曲线方程为

$$y = \sin x.$$

**例 8.11** 设  $\Gamma$  为曲线  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x - y + z = 2 \end{cases}$  从  $z$  轴正向往  $z$  轴负向看  $\Gamma$  是逆时针方向, 求

$$\oint_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz.$$

**解析** **方法 I** 取曲线  $\Gamma$  的参数方程, 将曲线积分化为对参数的定积分. 令  $x = \cos \theta, y = \sin \theta$ , 则  $z = 2 - x + y = 2 - \cos \theta + \sin \theta$ , 于是

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma} (z-y)dx + (x-z)dy + (x-y)dz \\ &= - \int_0^{2\pi} [2(\sin \theta + \cos \theta) - 2\cos 2\theta - 1] d\theta \\ &= - [2(-\cos \theta + \sin \theta) - \sin 2\theta - \theta] \Big|_0^{2\pi} = 2\pi. \end{aligned}$$

**方法 II** 采用斯托克斯公式计算.

平面  $x - y + z = 2$  与  $x$  轴,  $y$  轴,  $z$  轴的交点分别为  $A(2, 0, 0), B(0, -2, 0), C(0, 0, 2)$ , 过  $A, B, C$  的平面与圆柱面的交线  $\Gamma$  如图 8.4 所示, 设  $\Gamma$  所围的平面区域为  $\Sigma$ , 取上侧 (与  $\Gamma$  的方向服从右旋法则). 设  $\Sigma$  在  $xy$  平面上的投影区域为  $D$ , 则

$$D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

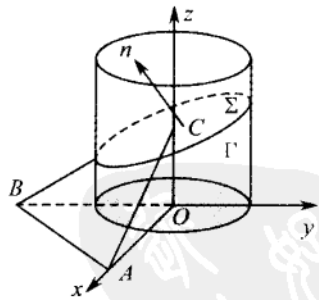


图 8.4

记  $P = z - y, Q = x - z, R = x - y$ , 应用斯托克斯公式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \\ &\quad \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} 0 dydz + 0 dzdx + 2 dxdy \\ &= \iint_D 2 dxdy = 2 \cdot \pi \cdot 1^2 = 2\pi. \end{aligned}$$

**例 8.12** 设曲线  $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + y = R \end{cases}$  从  $y$  轴正向看去是顺时针方向, 试求

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{2} y^2 dx - xz dy + \frac{1}{2} y^2 dz.$$

**解析** 方法 I 曲线  $\Gamma$  的方程改写为

$$\begin{aligned} \left( y - \frac{R}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} z^2 &= \left( \frac{R}{2} \right)^2, \\ x &= R - y, \end{aligned}$$

于是曲线  $\Gamma$  的参数方程为

$$x = \frac{R}{2}(1 - \cos \theta), \quad y = \frac{R}{2}(1 + \cos \theta), \quad z = \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta,$$

$\theta$  从  $\pi$  单调减少到  $-\pi$  (与  $\Gamma$  的方向一致), 代入原式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{\pi}^{-\pi} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{R}{2} \right)^2 (1 + \cos \theta)^2 \frac{R}{2} \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{R}{2} (1 - \cos \theta) \frac{R}{\sqrt{2}} \sin \theta \frac{R}{2} \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \left( \frac{R}{2} \right)^2 (1 + \cos \theta)^2 \frac{R}{\sqrt{2}} \cos \theta \right] d\theta \\ &= 0 - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{8} R^3 (\sin^2 \theta - \cos \theta \cdot \sin^2 \theta) d\theta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{16} R^3 (1 + \cos \theta)^2 \cos \theta d\theta \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4} R^3 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} - \\
& \quad \frac{\sqrt{2}}{8} R^3 \left( \theta + 2 \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{4} R^3 \pi.
\end{aligned}$$

**方法 II** 在平面  $x + y = R$  上取曲线  $\Gamma$  所围的平面域为  $\Sigma$ , 取后侧(与  $\Gamma$  的方向服从右旋法则), 应用斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \iint_{\Sigma} (y+x) dydz - (z+y) dx dy \\
&= \iint_{\Sigma} (y+x) dydz = - \iint_D R dydz = -R \iint_D dydz,
\end{aligned}$$

这里  $D$  为曲线  $\Gamma$  在  $yz$  平面上的投影所围区域, 即

$$D = \left\{ (y, z) \mid \left( y - \frac{R}{2} \right)^2 + \frac{z^2}{2} \leq \left( \frac{R}{2} \right)^2 \right\},$$

区域  $D$  的面积  $= \pi \left( \frac{R}{2} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^2$ , 于是

$$\text{原式} = -\frac{\sqrt{2}}{4} \pi R^3.$$

**例 8.13** 设曲线  $\Gamma$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  与  $x^2 + y^2 = 2rx$  ( $0 < r < R, z \geq 0$ ) 的交线, 从  $z$  轴正向看去为逆时针方向, 求

$$\oint_{\Gamma} (x^2 + z^2) dy.$$

**解析** 记  $P = 0, Q = x^2 + z^2, R = 0$ , 设  $\Sigma$  为球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  上以  $\Gamma$  为边界的部分曲面, 取上侧(与  $\Gamma$  的方向服从右旋法则),  $\Sigma$  在  $xy$  平面上的投影区域为

$$D = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2rx \},$$

应用斯托克斯公式得

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dzdx + \\ &\quad \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\ &= \iint_{\Sigma} -2z dydz + 2x dxdy,\end{aligned}$$

由于  $\Sigma$  的法向量为  $\mathbf{n} = (x-R, y, z)$ , 且有

$$\frac{dydz}{x-R} = \frac{dzdx}{y} = \frac{dxdy}{z},$$

所以

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \iint_{\Sigma} -2(x-R) dxdy + 2x dxdy \\ &= 2R \iint_{\Sigma} dxdy = 2R \iint_D dxdy = 2\pi Rr^2.\end{aligned}$$

**例 8.14** 设函数  $f(x), g(x)$  连续可微,  $f(0) = 0, g(0) = 0$ , 使得曲线积分

$$\int_A^B \left( (x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2 \right) dx + (f(x)y - g(x))dy + zdz$$

与路线无关, 这里  $A, B$  的坐标分别为  $(0, 1, 0)$  与  $(1, 0, 1)$ , 试求函数  $f(x)$  与  $g(x)$ , 并求该曲线积分的值.

**解析** 记  $P = (x^2 - f(x))y + \frac{1}{2}g(x)y^2$ ,  $Q = f(x)y - g(x)$ ,

$R = z$ , 因曲线积分与路线无关, 其充要条件是

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

即得

$$0 = 0, \quad 0 = 0, \quad f'(x)y - g'(x) = x^2 - f(x) + g(x)y,$$

化简得  $(f'(x) - g(x))y = g'(x) - f(x) + x^2$ , 欲此式恒成立, 必须

$$f'(x) - g(x) = 0, \quad g'(x) - f(x) + x^2 = 0,$$

这是关于  $f(x), g(x)$  的一阶常系数线性非齐次方程组, 用消去法得

$$f''(x) - f(x) = -x^2,$$

此微分方程的通解为(解法见 10.1)

$$f(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x + x^2 + 2,$$

由于  $f(0) = 0, f'(0) = g(0) = 0$ , 代入上式可解得  $C_1 = C_2 = -1$ , 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= -e^{-x} - e^x + x^2 + 2, \\ g(x) &= f'(x) = e^{-x} - e^x + 2x, \end{aligned}$$

由此得

$$P = (e^{-x} + e^x - 2)y + \frac{1}{2}(e^{-x} - e^x + 2x)y^2,$$

$$Q = (-e^{-x} - e^x + x^2 + 2)y - (e^{-x} - e^x + 2x), \quad R = z,$$

应用求原函数的公式得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^x P(x, 0, 0) dx + \int_0^y Q(x, y, 0) dy + \int_0^z R(x, y, z) dz \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y [(-e^{-x} - e^x + x^2 + 2)y - \\ &\quad (e^{-x} - e^x + 2x)] dy + \int_0^z z dz \\ &= \frac{1}{2}(-e^{-x} - e^x + x^2 + 2)y^2 - \\ &\quad (e^{-x} - e^x + 2x)y + \frac{1}{2}z^2, \end{aligned}$$

于是

$$\text{原式} = u(x, y, z) \Big|_{(0,1,0)}^{(1,0,1)} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

**例 8.15** 设平面曲线  $\Gamma$  为  $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x$  的边界的正向, 方向  $\mathbf{n}$  为曲线  $\Gamma$  的外法向量, 函数  $f(x, y) = e^x(y - \sin y), \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}$

表示  $f$  沿方向  $\boldsymbol{n}$  的方向导数, 计算  $\oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} d\boldsymbol{l}$ .

**解析** 设  $\Gamma$  正向的单位切向量为  $\boldsymbol{\tau}^0 = (\cos \alpha, \cos \beta)$ , 则其单位外法向量为

$$\boldsymbol{n}^0 = (\cos \beta, -\cos \alpha),$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} d\boldsymbol{l} &= \oint_{\Gamma} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial y} (-\cos \alpha) \right) d\boldsymbol{l} \\ &= \oint_{\Gamma} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx \quad (\text{应用格林公式}) \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_D e^x y dx dy \\ &= \int_0^{\pi} dx \int_0^{\sin x} e^x y dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} e^x \sin^2 x dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^x dx - \frac{1}{4} \int_0^{\pi} e^x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4} (e^{\pi} - 1) - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x) \Big|_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{5} (e^{\pi} - 1). \end{aligned}$$

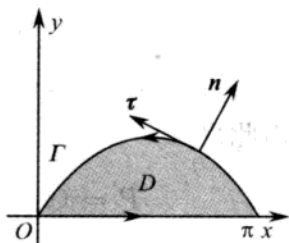


图 8.5

**例 8.16** 设曲面  $\Sigma$  为圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  介于  $x^2 + y^2 \leq 2x$  内的部分, 计算

$$\iint_{\Sigma} z dS.$$

**解析** 由于  $1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 2$ ,

曲面  $\Sigma$  在  $xy$  平面上的投影为  $D: x^2 + y^2 \leq 2x$ , 则

$$\iint_{\Sigma} z dS = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{2} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
 &= \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 d\rho = 2\sqrt{2} \cdot \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta d\theta \\
 &= \frac{16}{3} \sqrt{2} \left( \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{32}{9} \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

**例 8.17** 设  $S$  为椭球面  $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$  的上半部分, 点  $P(x, y, z) \in S$ ,  $\Pi$  为  $S$  在点  $P$  处的切平面,  $\rho(x, y, z)$  为点  $O(0, 0, 0)$  到平面  $\Pi$  的距离, 求  $\iint_S \frac{z}{\rho(x, y, z)} dS$ .

**解析** 这是空间解析几何与曲面积分的综合题. 设  $(X, Y, Z)$  为  $\Pi$  上任意一点, 则  $S$  在点  $P$  的切平面  $\Pi$  的方程为

$$\frac{xX}{2} + \frac{yY}{2} + zZ = 1,$$

从而原点  $O$  到  $\Pi$  的距离为

$$\rho(x, y, z) = \left( \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2 \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

由于

$$\begin{aligned}
 z &= \sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}, \\
 \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{-x}{2\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{2\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}},
 \end{aligned}$$

于是

$$dS = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = \frac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{2\sqrt{1 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)}} dx dy,$$

所以

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{z \, dS}{\rho(x, y, z)} &= \frac{1}{4} \iint_D (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\
 &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} (4 - \rho^2) \rho \, d\rho \\
 &= \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot \left( 2\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right) \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\pi.
 \end{aligned}$$

**例 8.18** 设  $\Sigma$  为上半球面  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧, 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) \, dy \, dz + (y^3 + ax^2) \, dz \, dx + (z^3 + ay^2) \, dx \, dy.$$

**解析** 给曲面  $\Sigma$  添下底面  $S$  成封闭曲面后应用高斯公式计算. 记  $S$  为平面  $z = 0 (x^2 + y^2 \leq a^2)$  的下侧,  $\Omega$  为  $\Sigma$  与  $S$  所围成的空间区域. 于是

$$\begin{aligned}
 \text{原式} &= \oiint_{\Sigma+S} (x^3 + az^2) \, dy \, dz + (y^3 + ax^2) \, dz \, dx + (z^3 + ay^2) \, dx \, dy - \\
 &\quad \iint_S (x^3 + az^2) \, dy \, dz + (y^3 + ax^2) \, dz \, dx + (z^3 + ay^2) \, dx \, dy \\
 &= \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} ay^2 \, dx \, dy \\
 &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \int_0^a r^4 \, dr + a \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^a \rho^3 \, d\rho \\
 &= \frac{6}{5} \pi a^5 + \frac{1}{4} \pi a^5 = \frac{29}{20} \pi a^5.
 \end{aligned}$$

**例 8.19** 设  $\Sigma$  为下半球面  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$  的上侧,  $a$  为大于零的常数, 计算

$$\iint_{\Sigma} \frac{ax \, dy \, dz + (z+a)^2 \, dx \, dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}}.$$

**解析** **方法 I** 曲面积分是沿着曲面的积分, 可用曲面方程代入被积表达式化简, 对本题而言特别重要. 因  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  代



入被积表达式后将分母中 $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ 化为 $a$ 提出去,使得余下的被积表达式能够用高斯公式计算(否则高斯公式所要求的连续可微性条件不满足).由于高斯公式要求积分曲面为封闭曲面,所以必须在原曲面 $\Sigma$ 上补上一块有向曲面

$$S^-: \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2, \\ z = 0, \end{cases}$$

其法向量与 $z$ 轴正向相反,应用高斯公式得到

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \left[ \oiint_{\Sigma+S^-} ax \, dydz + (z+a)^2 \, dx dy - \iint_{S^-} ax \, dydz + (z+a)^2 \, dx dy \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ - \iiint_{\Omega} (3a+2z) \, dv + \iint_D a^2 \, dx dy \right], \end{aligned}$$

其中 $\Omega$ 为 $\Sigma+S^-$ 围成的空间区域, $D$ 为 $z=0$ 上的平面区域 $x^2+y^2 \leq a^2$ .于是

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \left[ -2\pi a^4 - 2 \iiint_{\Omega} z \, dv + \pi a^4 \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[ -\pi a^4 - 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho d\rho \int_{-\sqrt{a^2-\rho^2}}^0 z \, dz \right] \\ &= -\frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

**方法 II** 用统一投影法化为二重积分计算. 由于

$$\frac{dydz}{x} = \frac{dzdx}{y} = \frac{dxdy}{z},$$

所以 $dydz = \frac{x}{z} dxdy$ , 记 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} \left( a \frac{x^2}{z} + (z+a)^2 \right) dxdy \\ &= \frac{1}{a} \iint_D \left( -\frac{ax^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} + (a - \sqrt{a^2-x^2-y^2})^2 \right) dxdy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left( -\frac{a\rho^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} + (a - \sqrt{a^2 - \rho^2})^2 \right) \rho d\rho \\
&= - \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \cdot \int_0^a \frac{\rho^3}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} d\rho + a \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a \rho d\rho - \\
&\quad 2 \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^a \rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho + \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - \rho^2) \rho d\rho \\
&\quad (\text{第一项中含 } \rho = a \sin t) \\
&= -\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^3 t dt + \pi a^3 + \frac{4}{3} \pi (a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a + \\
&\quad \frac{2\pi}{a} \left( \frac{1}{2} a^2 \rho^2 - \frac{1}{4} \rho^4 \right) \Big|_0^a \\
&= -\pi a^3 \left( \cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi a^3 - \frac{4}{3} \pi a^3 + \frac{1}{2} \pi a^3 \\
&= -\frac{1}{2} \pi a^3.
\end{aligned}$$

**方法 III** 用分项投影法分别化为二重积分计算.

$$\text{原式} = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} a x dy dz + (z+a)^2 dx dy.$$

则

$$I_1 = \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} a x dy dz = -2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{a^2 - (y^2 + z^2)} dy dz,$$

其中  $D_{xy}$  为  $yOz$  平面上的半圆:  $y^2 + z^2 \leq a^2, z \leq 0$ . 利用极坐标计算, 得

$$\begin{aligned}
I_1 &= -2 \int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\rho = -\frac{2}{3} \pi a^3, \\
I_2 &= \frac{1}{a} \iint_{\Sigma} (z+a)^2 dx dy = \frac{1}{a} \iint_{D_{xy}} [a - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}]^2 dx dy \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (2a^2 - 2a \sqrt{a^2 - \rho^2} - \rho^2) \rho d\rho
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} 2\pi(a^2 \rho^2 + \frac{2}{3}a(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\rho^4) \Big|_0^a = \frac{\pi}{6}a^3,$$

其中  $D_{xy}$  为  $xOy$  平面上的圆域:  $x^2 + y^2 \leq a^2$ . 因此

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{2}a^3.$$

**例 8.20** 设  $S$  为有向曲面  $z = x^2 + y^2$  ( $0 \leq z \leq 1$ ), 其法向量与  $z$  轴正向的夹角为锐角. 计算曲面积分

$$\iint_S (2x + z) dydz + z dx dy.$$

**解析** 方法 I 应用高斯公式计算.

以  $S_1$  表示法向量指向  $z$  轴负向的有向平面  $z = 1$  ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ),  $D$  为  $S_1$  在  $xOy$  平面上的投影区域, 则

$$\iint_{S_1} (2x + z) dydz + z dx dy = \iint_D (-dx dy) = -\pi.$$

设  $\Omega$  表示由  $S$  和  $S_1$  所围成的空间区域, 则由高斯公式知

$$\begin{aligned} \oiint_{S+S_1} (2x + z) dydz + z dx dy &= - \iiint_{\Omega} (2 + 1) dv \\ &= -3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 dz = -6\pi \int_0^1 (\rho - \rho^3) d\rho \\ &= -6\pi \left( \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right) \Big|_0^1 = -\frac{3}{2}\pi, \end{aligned}$$

因此

$$\iint_S (2x + z) dydz + z dx dy = -\frac{3}{2}\pi - (-\pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

**方法 II** 采用分项投影法分别化为二重积分计算.

设  $D_{yz}, D_{xy}$  分别表示  $S$  在  $yOz$  平面,  $xOy$  平面上的投影区域, 则

$$\text{原式} = - \iint_{D_{yz}} (2\sqrt{z-y^2} + z) dydz +$$

$$\begin{aligned} & \iint_{D_{yz}} (-2\sqrt{z-y^2} + z) dydz + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= -4 \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dydz + \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy, \end{aligned}$$

其中  $D_{yz} = \{(y, z) \mid y^2 \leq z \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ ,  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2} dydz &= \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sqrt{z-y^2} dz = \frac{4}{3} \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{3}{2}} dy \\ &\stackrel{y=\sin t}{=} \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t dt = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}, \\ \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho d\rho = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$\text{原式} = -4 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

**例 8.21** 计算

$$\oint_{\Sigma} x^3 dydz + \left[ \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3 \right] dzdx + \left[ \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3 \right] dx dy,$$

其中  $f\left(\frac{y}{z}\right)$  一阶连续可导,  $\Sigma$  为  $x > 0$  的锥面  $y^2 + z^2 - x^2 = 0$  与球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  所围立体表面的外侧.

**解析** 记  $P = x^3$ ,  $Q = \frac{1}{z} f\left(\frac{y}{z}\right) + y^3$ ,  $R = \frac{1}{y} f\left(\frac{y}{z}\right) + z^3$ , 应用高斯公式(设  $\Sigma$  所围立体为  $\Omega$ ) 得

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} [P'_x + Q'_y + R'_z] dv = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dv,$$

取球坐标变换:  $y = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $z = r \sin \varphi \sin \theta$ ,  $x = r \cos \varphi$ , 则  $|J| = r^2 \sin \varphi$ , 且

$$\Omega = \{(r, \varphi, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\},$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_1^2 r^4 \sin \varphi \, dr \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \frac{31}{5} \\ &= \frac{93}{5} (2 - \sqrt{2}) \pi.\end{aligned}$$

### 例 8.22 计算曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^3 + z) dydz + (y^3 + x) dzdx + dx dy,$$

这里  $\Sigma$  是曲线  $\begin{cases} z = 1 - x^2, \\ y = 0 \end{cases}$  ( $|x| \leq 1$ ) 绕  $z$  轴旋转一周得到的曲面的上侧.

**解析**  $\Sigma$  的方程为  $z = 1 - x^2 - y^2$  ( $z \geq 0$ ). 取

$$D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$$

的上侧, 设  $\Sigma + D^-$  所围的立体域为  $\Omega$ , 由高斯公式得

$$\begin{aligned}& \oiint_{\Sigma + D^-} (x^3 + z) dydz + (y^3 + x) dzdx + dx dy \\ &= 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv = 3 \iint_D dx dy \int_0^{1-x^2-y^2} (x^2 + y^2) dz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{1-\rho^2} dz = 6\pi \int_0^1 \rho^3 (1 - \rho^2) d\rho = \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\pi}{2} - \iint_{D^-} (x^3 + z) dydz + (y^3 + x) dzdx + dx dy \\ &= \frac{\pi}{2} + \iint_D dx dy = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

**例 8.23** 如图 8.6, 设曲面  $\Sigma$  为由  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $z = R$ ,  $z = -R$  所围立体表面的外侧, 计算

$$\oiint_{\Sigma} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

**解析** 设曲面  $\Sigma$  的上底  $z = R$  部分为  $\Sigma_1$ , 取上侧; 下底  $z = -R$  部分为  $\Sigma_2$ , 取下侧; 侧面  $x^2 + y^2 = R^2$  部分为  $\Sigma_3$ , 取外侧. 则

$$\iint_{\Sigma} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3},$$

$$\iint_{\Sigma_1} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{D_1} \frac{R^2}{x^2 + y^2 + R^2} dx dy \equiv I_1,$$

其中  $D_1$  为  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

$$\iint_{\Sigma_2} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = - \iint_{D_1} \frac{(-R)^2}{x^2 + y^2 + (-R)^2} dx dy = -I_1,$$

$$\iint_{\Sigma_3} \frac{x dy dz + z^2 dx dy}{x^2 + y^2 + z^2} = \iint_{\Sigma_3} \frac{x dy dz}{R^2 + z^2},$$

设  $\Sigma_3$  的  $x \geq 0$  的部分曲面为  $\Sigma'_3$ ,  $\Sigma_3$  的  $x \leq 0$  的部分曲面为  $\Sigma''_3$ , 它们在  $yz$  平面的投影区域为

$$D_2 = \{(y, z) \mid |y| \leq R, |z| \leq R\},$$

则

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_3} \frac{x dy dz}{R^2 + z^2} &= \iint_{\Sigma'_3} + \iint_{\Sigma''_3} \\ &= \iint_{D_2} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz - \iint_{D_2} \frac{-\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz \\ &= 2 \iint_{D_2} \frac{\sqrt{R^2 - y^2}}{R^2 + z^2} dy dz \\ &= 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy \cdot \int_{-R}^R \frac{1}{R^2 + z^2} dz \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{1}{R} \arctan \frac{z}{R} \Big|_{-R}^R = \frac{1}{2} \pi^2 R, \end{aligned}$$

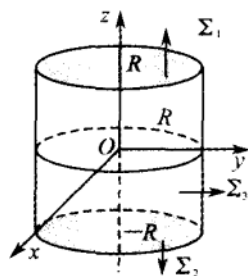


图 8.6

这里  $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} dy = \frac{1}{2} \pi R^2$  是应用定积分的几何意义, 其积分值等于半圆的面积. 于是

$$\text{原式} = I_1 - I_1 + \frac{1}{2} \pi^2 R = \frac{1}{2} \pi^2 R.$$

**评注** 由于被积分函数在曲面  $S$  内的点  $(0, 0, 0)$  处不具有连续偏导数, 所以本题不可应用高斯公式计算.

**例 8.24** 设曲面  $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  上点  $(x, y, z)$  处的切平面为  $\Pi$ , 记坐标原点到  $\Pi$  的距离为  $\rho$ , 计算

$$\oiint_{\Sigma} \frac{1}{\rho} dS.$$

**解析** 曲面  $\Sigma$  上点  $(x, y, z)$  处的切平面  $\Pi$  的方程为

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1,$$

坐标原点到  $\Pi$  的距离为

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

曲面  $\Sigma$  在点  $(x, y, z)$  的外侧法向量的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{x}{a^2 \sqrt{u}}, \quad \cos \beta = \frac{y}{b^2 \sqrt{u}}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{c^2 \sqrt{u}},$$

这里  $u = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$ , 应用高斯公式得

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \oiint_{\Sigma} \sqrt{u} dS = \oiint_{\Sigma} \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right) \frac{1}{\sqrt{u}} dS \\ &= \oiint_{\Sigma} \left( \frac{x}{a^2} \cos \alpha + \frac{y}{b^2} \cos \beta + \frac{z}{c^2} \cos \gamma \right) dS \\ &= \oiint_{\Sigma} \frac{x}{a^2} dydz + \frac{y}{b^2} dzdx + \frac{z}{c^2} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_{\Omega} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) dv \\
 &= \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \frac{4}{3} \pi abc.
 \end{aligned}$$

**例 8.25** 质点  $P$  沿着以  $AB$  为直径的半圆周从  $A(1,2)$  到  $B(3,4)$  运动(如图 8.7), 受力  $F$  作用,  $F$  的大小等于  $P$  与原点的距离, 其方向垂直于线段  $OP$  且与  $y$  轴的夹角小于  $\frac{\pi}{2}$ , 求力  $F$  对质点  $P$  所作的功.

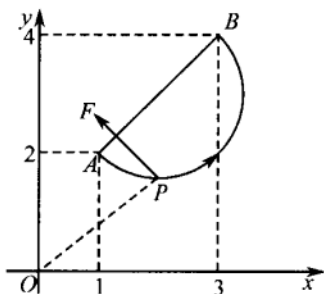


图 8.7

**解析**  $|F| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ , 因  $F \perp \overrightarrow{OP}$ , 故  $F = (-y, x)$ , 力  $F$  对质点  $P$  所作的功为

$$W = \int_{\widehat{AB}} -ydx + xdy.$$

设  $\widehat{AB}$  与  $\overline{BA}$  所围区域为  $D$ , 应用格林公式得

$$\oint_{\widehat{AB} + \overline{BA}} -ydx + xdy = 2 \iint_D dx dy = \pi \left( \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} \right)^2 = 2\pi,$$

直线  $AB$  的方程为  $y = x + 1$ , 于是

$$W = 2\pi - \int_{\overline{BA}} = 2\pi + \int_{\widehat{AB}} = 2\pi - \int_1^3 dx = 2(\pi - 1).$$

**例 8.26** 在变力  $F = (yz, zx, xy)$  作用下, 一质点由坐标原点沿直线运动到椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  上的点  $(a, b, c)$  处 ( $a, b, c > 0$ ), 问  $a, b, c$  取何值时, 力  $F$  所作的功取最大值? 并求其最大值.

**解析** 这是曲线积分与拉格朗日乘数法的综合应用题.

记  $F$  所作的功为  $W$ , 点  $P$  为  $(a, b, c)$ , 则直线  $OP$  的参数方程为

$$x = at, \quad y = bt, \quad z = ct,$$

$t$  从 0 增大到 1, 于是



$$W = \int_{(P)} yz dx + zx dy + xy dz = \int_0^1 3abct^2 dt = abc.$$

由于点  $P$  在椭球面  $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$  上, 故  $a, b, c$  应满足方程

$$\varphi(a, b, c) = a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 1 = 0.$$

应用拉格朗日乘数法, 令

$$f = abc + \lambda(a^2 + 2b^2 + 3c^2 - 1),$$

由

$$\begin{cases} f'_a = bc + 2\lambda a = 0, \\ f'_b = ac + 4\lambda b = 0, \\ f'_c = ab + 6\lambda c = 0, \\ a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 1, \end{cases}$$

解得驻点  $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3})$ . 由于力  $F$  所作功的最大值存在, 驻点又是惟一的, 故当  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}, b = \frac{1}{\sqrt{6}}, c = \frac{1}{3}$  时力  $F$  所作的功最大, 其最大值为

$$W_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{18}\sqrt{2}.$$

**例 8.27** 设  $r = (x, y, z), r = |r|, f(r) \in C^{(2)}$ , 试求  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{f(r)}{r}$ .

**解析** 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f(r)}{r} = \frac{x}{r^3} (rf'(r) - f(r)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{f(r)}{r} = \frac{y}{r^3} (rf'(r) - f(r)),$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{f(r)}{r} = \frac{z}{r^3} (rf'(r) - f(r)),$$

所以

$$\operatorname{grad} \frac{f(r)}{r} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{f(r)}{r}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{f(r)}{r}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{f(r)}{r} \right)$$

$$= (rf'(r) - f(r)) \frac{1}{r^3}(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r))\mathbf{r},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \frac{f(r)}{r}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r))x \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r))y \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r))z \right]$$

$$= \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) + x \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) \right] \cdot \frac{x}{r} + \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) + y \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) \right] \cdot \frac{y}{r} + \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) + z \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) \right] \cdot \frac{z}{r}$$

$$= 3 \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) + r \frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r^3}(rf'(r) - f(r)) \right]$$

$$= \frac{3}{r^3}(rf'(r) - f(r)) + r \left[ \frac{1}{r^2}f''(r) - \frac{3}{r^4}(rf'(r) - f(r)) \right]$$

$$= \frac{1}{r}f''(r).$$

**例 8.28** 设  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ,  $r = |\mathbf{r}|$ , 求  $\operatorname{grad} \operatorname{div} (r\mathbf{r})$ .

**解析** 因  $\nabla r = \frac{1}{r}\mathbf{r}$ ,  $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$ , 故

$$\nabla \cdot (r\mathbf{r}) = \nabla r \cdot \mathbf{r} + r \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{1}{r}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} + 3r = 4r,$$

$$\nabla(\nabla \cdot (r\mathbf{r})) = \nabla(4r) = 4 \nabla r = \frac{4}{r}\mathbf{r},$$

即

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} (r\mathbf{r}) = \frac{4}{r}\mathbf{r}.$$

**例 8.29** 确定常数  $\lambda$ , 使在右半平面  $x > 0$  上的向量  $\mathbf{A}(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{i} - x^2(x^4 + y^2)^\lambda \mathbf{j}$  为某二元函数  $u(x, y)$  的梯度, 并求  $u(x, y)$ .

**解析** 记  $P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda$ , 由于向量  $\mathbf{A}$  等于函数  $u$  的梯度, 即

$$\mathbf{A} = (P, Q) = \text{grad } u(x, y)$$

的充要条件是  $Q'_x = P'_y$ . 而

$$Q'_x = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

$$P'_y = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

所以

$$\begin{aligned} & -2x(x^4 + y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1} \\ & = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 4\lambda xy^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1}, \end{aligned}$$

解得  $\lambda = -1$ ,

在右半平面内任取一点, 例如  $(1, 0)$  作为积分路径的起点, 由于曲线积分与路线无关, 则得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xydx - x^2dy}{x^4 + y^2} + C \\ &= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0} dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy + C \\ &= -\arctan \frac{y}{x^2} + C. \end{aligned}$$

**例 8.30** 试求常数  $\lambda$ , 使得在  $xy$  平面上方的向量

$\mathbf{A} = yz(x^2y^2 + z^2)^\lambda \mathbf{i} + zx(x^2y^2 + z^2)^\lambda \mathbf{j} - xy(x^2y^2 + z^2)^\lambda \mathbf{k}$  等于函数  $u(x, y, z)$  的梯度, 并求函数  $u(x, y, z)$ .

**解析** 记  $P = yz(x^2y^2 + z^2)^\lambda, Q = zx(x^2y^2 + z^2)^\lambda, R = -xy(x^2y^2 + z^2)^\lambda$ , 则  $\mathbf{A} = \text{grad } u$  的充要条件为

$$du(x, y, z) = Pdx + Qdy + Rdz,$$

故有

$$\frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y},$$

化简得

$$\begin{cases} -x(x^2y^2+z^2)^{\lambda-1}((2\lambda+1)x^2y^2+z^2) \\ \equiv x(x^2y^2+z^2)^{\lambda-1}(x^2y^2+(2\lambda+1)z^2), \\ y(x^2y^2+z^2)^{\lambda-1}(x^2y^2+(2\lambda+1)z^2) \\ \equiv -y(x^2y^2+z^2)^{\lambda-1}((2\lambda+1)x^2y^2+z^2), \\ z(x^2y^2+z^2)^{\lambda-1}((2\lambda+1)x^2y^2+z^2) \\ \equiv z(x^2y^2+z^2)^{\lambda-1}((2\lambda+1)x^2y^2+z^2), \\ \Rightarrow \begin{cases} 2(\lambda+1)x(x^2y^2+z^2)^\lambda \equiv 0, \\ 2(\lambda+1)y(x^2y^2+z^2)^\lambda \equiv 0, \end{cases} \end{cases}$$

故  $\lambda = -1$ . 下面求函数  $u(x, y, z)$ , 取点  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1)$ , 应用求原函数的公式得

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x P(x, y, z) dx + \int_0^y Q(0, y, z) dy + \int_1^z R(0, 0, z) dz + C \\ &= \int_0^x \frac{yz}{x^2y^2+z^2} dx + \int_0^y 0 dy + \int_1^z 0 dz + C \\ &= \int_0^x \frac{z}{z^2+(xy)^2} d(xy) = \arctan \frac{xy}{z} + C. \end{aligned}$$

**例 8.31** 设  $n$  是曲面  $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$  在点  $P(1, 1, 1)$  处指向外侧的法向量, 求  $u = \frac{1}{z} \sqrt{6x^2 + 8y^2}$  在点  $P$  沿  $n$  的方向导数.

**解析** 记  $F = 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 6$ , 则

$$(F'_x, F'_y, F'_z) \Big|_P = (4x, 6y, 2z) \Big|_P = (4, 6, 2),$$

取曲面外侧的法向量  $n = (2, 3, 1)$ , 则  $n^0 = \left( \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{1}{\sqrt{14}} \right)$ ,

因为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{6x}{z \sqrt{6x^2 + 8y^2}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{8y}{z \sqrt{6x^2 + 8y^2}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{z^2} \sqrt{6x^2 + 8y^2},$$

显见  $\frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial z}$  在  $P$  的附近连续, 所以  $u$  在  $P$  处可微, 因此

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(P) &= \frac{\partial u}{\partial x}(P) \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial y}(P) \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{\partial u}{\partial z}(P) \frac{1}{\sqrt{14}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{14}} \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}. \end{aligned}$$

### 例 8.32 求函数

$$u = \cos^2(xy) + \frac{y}{z^2}$$

在点  $P(0, -19, -24)$  沿着直线  $l$  的方向导数, 这里  $l$  是直线  $l_1$ :

$$\begin{cases} x - z = 2, \\ y - 2z + 4 = 0, \end{cases}$$

在平面  $x + y - z = 5$  上的射影 ( $l$  的方向规定为  $l$  与  $z$  轴成钝角的方向).

**解析** 过直线  $l_1$  的平面束方程为

$$(x - z - 2) + \lambda(y - 2z + 4) = 0, \quad (II)$$

此平面束的法向量  $\mathbf{n}_1 = (1, \lambda, -(1 + 2\lambda))$ , 要求平面  $\Pi$  与平面  $x + y - z = 5$  (其法向量  $\mathbf{n}_2 = (1, 1, -1)$ ) 垂直, 则有

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 1 + \lambda + (1 + 2\lambda) = 0,$$

故  $\lambda = -\frac{2}{3}$ , 此时平面  $\Pi$  的方程为  $3x - 2y + z - 14 = 0$ . 它的法向量为

$\mathbf{n}_1 = \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ . 取直线  $l$  的方向向量为

$$\mathbf{l} = -3\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = (-1, -4, -5),$$

则向量  $l$  的方向余弦为

$$\cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{42}}, \quad \cos \beta = \frac{-4}{\sqrt{42}}, \quad \cos \gamma = \frac{-5}{\sqrt{42}},$$

另一方面,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x}(P) = -y \sin(2xy) \right|_P = 0,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y}(P) = -x \sin(2xy) + \frac{1}{z^2} \right|_P = \frac{1}{24^2}.$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z}(P) = -\frac{2y}{z^3} \right|_P = -\frac{38}{24^3},$$

因此

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_P = \frac{\partial u}{\partial x}(P) \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y}(P) \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z}(P) \cos \gamma = \frac{94}{24^3 \sqrt{42}}.$$



## 阶段复习试题四

1. 交换下列二次积分的次序:

$$(1) \int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x, y) dy; \quad (2) \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 f(x, y) dy;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{2x-1}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy; \quad (4) \int_0^a dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{y+a} f(x, y) dx;$$

$$(5) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{3-2y} f(x, y) dx;$$

$$(6) \int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x, y) dx.$$

2. 求下列积分的值:

$$(1) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} dy \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \cos(x^2) dx;$$

$$(2) \iint_D |y - x^2| dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(3) \iint_D |y - x^2| \max(x, y) dx dy, \quad D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$(4) \iint_D (|x - y| + 2) dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$(5) \iint_D |x^2 + y^2 - 2| dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 3;$$

$$(6) \iint_D (x + y)^2 dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 2ay, x^2 + y^2 \geq ay;$$

$$(7) \iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy, \quad D: y^2 = x, x = 0, y = 1 \text{ 所围区域};$$

$$(8) \iint_D y dx dy, \quad D: x^2 + y^2 \leq 4a^2, \rho \geq a(1 + \cos \theta), y \geq 0.$$

3. 计算  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} \frac{ye^y}{1-\sqrt{y}} dy$ .

4. 计算  $\int_0^1 xf(x)dx$ , 其中  $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt$ .

5. 将  $\iint_D f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$  ( $D: x^2 + y^2 \leq x$ ) 化为定积分形式.

6. 计算  $\iint_D (x+y)^3(x-y)^2 dx dy$ , 其中  $D$  是由  $x+y=1, x+y=3, x-y=1, x-y=-1$  所围的正方形.

7. 计算  $\iint_D \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}} dx dy$ , 其中  $D$  为  $\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} = 1$  与坐标轴所围的区域.

8. 计算由曲线  $y^2 = a^2 - 2ax, y^2 = b^2 - 2bx, y^2 = m^2 + 2mx, y^2 = n^2 + 2nx$  所围区域的面积. ( $y \geq 0, b > a > 0, n > m > 0$ )

9. 计算  $\iint_D (x+y)^2 dx dy, D: (x^2 + y^2)^2 \leq 2(x^2 - y^2)$ .

10. 计算下列三重积分:

(1)  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)^2 dv, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, 1 \leq z \leq 2;$

(2)  $\iiint_{\Omega} e^{x^2+y^2} dv, \Omega: z \geq x^2 + y^2, z \leq 1;$

(3)  $\iiint_{\Omega} [(1+x)^2 + y^2] dv, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq z;$

(4)  $\iiint_{\Omega} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} dv, \Omega: z = x^2 + y^2 \text{ 与 } z^2 = x^2 + y^2$

所围区域;

(5)  $\iiint_{\Omega} z dv, \Omega: z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \text{ 与 } x^2 + y^2 = 3z \text{ 所围区域};$

(6)  $\iiint_{\Omega} z^2 dv, \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz;$



$$(7) \iiint_{\Omega} x \exp\left(\frac{1}{a^2}(x^2 + y^2 + z^2)\right) dv, \quad \Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0;$$

$$(8) \iiint_{\Omega} \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv, \quad \Omega: \pi^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\pi^2.$$

11. 交换下列三次积分的次序:

$$(1) \int_0^1 dz \int_0^z dy \int_0^y f dx, \text{ 化为先对 } y, \text{ 次对 } z, \text{ 后对 } x;$$

$$(2) \int_a^b dx \int_a^x dy \int_a^y f dz, \text{ 化为先对 } y, \text{ 次对 } z, \text{ 后对 } x;$$

$$(3) \int_a^b dx \int_a^x dy \int_a^y f dz, \text{ 化为先对 } x, \text{ 次对 } y, \text{ 后对 } z;$$

$$(4) \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} dx \int_0^{\sqrt{\frac{3}{4}R^2 - x^2}} dy \int_{R - \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} f(x, y, z) dz, \text{ 化为先对 } x, \text{ 次对 } y, \text{ 后对 } z.$$

12. 求圆柱面  $x^2 + y^2 = ay$  介于  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $a > 0$ ) 与  $xy$  平面之间部分曲面的面积.

13. 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  位于球面  $x^2 + y^2 + (z - a)^2 = a^2$  内部的部分曲面的面积 ( $0 < R < 2a$ ). 当  $a$  为常数时,  $R$  为何值时上述所求面积最大?

14. 设  $\Omega$  是由  $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转一周所生成的曲面与平面

$z = 2, z = 8$  所围成的区域, (1) 计算  $\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dv$ ; (2) 求  $\Omega$  的表面积.

15. 求下列曲面所围立体的体积:

$$z = x^2 + y^2, \quad z = 2x^2 + 2y^2, \quad y = x, \quad y = x^2.$$

16. 计算下列曲线积分:

(1)  $\int_{\Gamma} x e^y dl$ ,  $\Gamma$  为以  $(0,0), (1,1), (0,1)$  为顶点的三角形的边界;

(2)  $\int_{\Gamma} x y^2 dy - x^2 y dx$ ,  $\Gamma$  为以  $(1,0), (0,1), (-1,0)$  为顶点的三角形的正向回路;

(3)  $\int_{\Gamma} (\sin x^2 + y) dx + x e^{-y} dy$ ,  $\Gamma$  为由  $x=0, y=1, y=x$  所围区域边界的正向;

(4)  $\int_{\Gamma} e^x (x+y+1) dx + e^x dy$ ,  $\Gamma$  为圆周  $x^2 + y^2 = 1$  在第一象限的部分, 取顺时针方向;

(5)  $\int_{\widehat{AO}} (e^x + 1) \cos y dx - [(e^x + x) \sin y - x] dy$ ,  $\widehat{AO}$  为由点  $A(2,0)$  至  $O(0,0)$  的心形线  $\rho = 1 + \cos \theta$  的上半周;

(6)  $\int_{\Gamma} y dx - x dy + (x+y+z) dz$ ,  $\Gamma$  为由弧  $\widehat{AmB}$  与直线  $BA$  组成, 弧  $\widehat{AmB}$  为螺旋线  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{c}{2\pi} t (0 \leq t \leq 2\pi)$  的一段,  $BA$  平行于  $z$  轴, 但指向相反;

(7)  $\int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$ ,  $\Gamma$  为圆周  $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + z = a, \end{cases}$  其指向沿着  $z$  轴正向看去是顺时针方向;

(8)  $\int_{\Gamma} (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$ ,  $\Gamma$  为  $\begin{cases} 2x+z=0, \\ x=\sqrt{1-y^2} \end{cases}$  上从点  $(0,1,0)$  到点  $(0,-1,0)$ .

17. 求柱面  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ , 被球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  所截部分的面积.

18. 设  $A, B$  为  $y$  轴上两点, 点  $A, B$  的纵坐标分别记为  $c, d (c <$

d), 曲线  $\Gamma: \widehat{AmBA}$  为由线段  $BA$  和光滑曲线  $\widehat{AmB}$  组成的闭曲线, 设  $\Gamma$  的正向所围图形的面积为  $S$ , 又设  $f(y), f'(y)$  为连续函数,  $\lambda$  为常数, 计算

$$\int_{\widehat{AmB}} [f(y) - \lambda y] dx + [f'(y)(x-1) + \lambda x] dy.$$

19. 设  $\widehat{AB}$  为连续  $A(1,2), B(3,4)$  的曲线弧, 且  $\widehat{AB}$  与  $\overline{AB}$  的正向所围图形的面积为  $S$ , 试求

$$\int_{\widehat{AB}} (2xe^y + 1) dx + (x^2 e^y + x) dy.$$

20. 设  $\Gamma$  为不自交的光滑闭曲线, 求

$$\oint_{\Gamma} \text{grad} [\exp(x+y+z)] \cdot dr.$$

21. 设  $I = \int_A^B P dx + Q dy + R dz$ , 其中  $P = xz + ay^2 + bz^2, Q = xy + az^2 + bx^2, R = yz + ax^2 + by^2$ , 试决定  $a, b$ , 使积分与路线无关, 其中  $A, B$  的坐标分别为  $(0,0,z_0)$  与  $(x_1, y_1, 0)$ , 试计算  $I$  之值.

22. 计算下列曲面积分:

(1)  $\iint_{\Sigma} z^2 dS, \Sigma: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$  的界面;

(2)  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}} dS, \Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (0 < a < 1);$

(3)  $\iint_{\Sigma} \frac{dS}{z}, \Sigma$  为  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  上  $R \geq z \geq h > 0$  的部分;

(4)  $\iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy, \Sigma: \text{锥面 } z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} (z \geq 0)$  的上侧;

(5)  $\iint_{\Sigma} (x-y) dx dy + (z-y) x dy dz, \Sigma$  为  $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1 (0 \leq z \leq 3)$  的外表面;

(6)  $\iint_{\Sigma} x^3 dydz + x^2 y dzdx + x^2 z dx dy$ ,  $\Sigma$  为柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  被  $z = 0, z = h$  所截部分的外侧;

(7)  $\iint_{\Sigma} z dx dy + (x^3 - yz) dy dz$ ,  $\Sigma$  为柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  被  $z = 0, z = 1$  所截部分的外侧;

(8)  $\iint_{\Sigma} y(x-z) dy dz + x(z-y) dx dy$ ,  $\Sigma: z = \sqrt{x^2 + y^2}$  被平面  $z = 1, z = 2$  所截得的一段的外侧;

(9)  $\iint_{\Sigma} \frac{1}{x} dy dz$ ,  $\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  的外表面;

(10)  $\iint_{\Sigma} z^2 dx dy$ ,  $\Sigma: (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$  的外表面.

23. 确定  $n$  的值, 使得曲线积分

$$\int_A^B (x^4 + 4xy^n) dx + (6x^{n-1}y^2 - 5y^4) dy$$

与路径无关. 并求出  $A(0,0), B(1,2)$  时该积分的值.

24. 求证向量场  $\mathbf{A} = (2xy^2z, 2x^2yz, x^2y^2)$  是无旋场 (即  $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$ ), 并求其势函数.

25. 求  $a, b, c$  使得向量场

$$\mathbf{A} = (ax + b^2 yz, by + axz, cxy - 2z)$$

为一调和场 (即  $\text{rot } \mathbf{A} \equiv \mathbf{0}, \text{div } \mathbf{A} \equiv 0$ ), 并求势函数.

26. 求向量  $\mathbf{v} = (yz + x, zx + y, xy + z)$  通过曲面  $\Sigma$  的流量, 这里  $\Sigma$  为柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  被平面  $z = 0$  与  $z = h (h > 0)$  截下的部分, 外侧为正侧.

27. 设  $\Sigma$  为封闭曲面,  $\Sigma$  所包围的立体为  $\Omega$ ,  $u, v \in C^{(2)}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}$  表示  $u, v$  沿  $\Sigma$  外侧法向的方向导数,  $\Delta$  为拉普拉斯算子 (即  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$

$+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2})$ , 证明

$$\oint_{\Sigma} \left( v \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) dS = \iiint_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dv.$$

28. 设  $\varphi = rf(r)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 求  $\nabla \times \nabla \varphi$ ,  $\nabla \cdot \nabla \varphi$ .



## 9

## 无穷级数

## 9.1 基本概念与内容提要

## 1) 级数的基本概念,基本性质,级数收敛的必要条件

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \in \mathbf{R})$  称为级数. 令  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$ , 称  $S_n$  为级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

的部分和. 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A (A \in \mathbf{R})$ , 称级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 否则称该级数发散.

(2)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛的必要条件是  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

(3) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  皆收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  也收敛.

(4) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$  发散.

(5) 收敛级数任意加括号后的新级数仍收敛, 且其和不变.

(6) 正项级数收敛的充要条件是其某一加括号后的新级数收敛.

## 2) \* 正项级数敛散性判别法

(1) 比较判别法 I 若  $0 \leq a_n \leq b_n$ , 则有:

当  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散.

(2) 比较判别法 II 设  $a_n \geq 0, b_n > 0$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda$ , 则有:

当  $0 \leq \lambda < +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛;

当  $0 < \lambda \leq +\infty$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

(3) 比值判别法 设  $a_n > 0$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda$ , 则有:

当  $0 \leq \lambda < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

(4) 根值判别法 设  $a_n > 0$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$ , 则有:

当  $0 \leq \lambda < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

(5) 积分判别法 设  $a_n > 0, f(n) = a_n, f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上连续且单调减少, 则有:

当  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛; 当  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  发散时,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

### 3) \* 两个重要级数

(1)  $p$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ , 当  $p \leq 1$  时发散, 当  $p > 1$  时收敛.

(2) 几何级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_0 q^n$ , 当且仅当  $|q| < 1$  时收敛, 且当  $|q| < 1$

时  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$ .

### 4) \* 任意项级数的绝对收敛性、条件收敛性、莱布尼兹法则

(1)  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  收敛时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  必收敛, 此时称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛.

(2) 若  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散, 但  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 此时称  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  条件收敛.

(3) 莱布尼兹法则 若交错级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  中  $a_n \geq a_{n+1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 则该级数收敛 (可能绝对收敛, 或条件收敛).

(4) 对任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$ , 则有:

当  $0 \leq \lambda < 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  绝对收敛;

当  $\lambda > 1$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散.

### 5) \* 幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域与和函数

设有幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R,$$

这里  $0 \leq R \leq +\infty$ , 当  $R=0$  时, 幂级数仅当  $x=0$  收敛; 当  $R=+\infty$  时, 幂级数的收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ ; 当  $0 < R < +\infty$  时, 称  $R$  为收敛半径, 称  $(-R, R)$  为收敛区间, 收敛区间与使幂级数收敛的端点 ( $x = \pm R$ ) 的并集称为收敛域.

幂级数在其收敛域上和函数连续, 在其收敛区间内可逐项求导数、逐项求积分, 且其收敛半径不变, 但两个端点的敛散性可能改变. 此性质常用于求幂级数的和函数.

### 6) \* 初等函数的幂级数展开式

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| < +\infty;$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad |x| < +\infty;$$



$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n}, \quad |x| < +\infty;$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad |x| < 1;$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1].$$

### 7) 傅里叶级数, 狄利克雷收敛定理

(1) \* 设  $f(x)$  是周期为  $2\pi$  的可积函数, 则有欧拉-傅里叶公式

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

函数  $f(x)$  的傅里叶级数展开式为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

(2) \* **狄利克雷收敛定理** 若  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的函数, 在  $[-\pi, \pi]$  上除有限个第一类间断点外均连续, 且在  $[-\pi, \pi]$  上有有限个极值点, 则  $f(x)$  的傅里叶级数展开式在  $(-\infty, +\infty)$  上处处收敛于  $\frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$ .

(3) \* **正弦级数与余弦级数.**

设  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上满足狄利克雷收敛条件, 将  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上作周期  $2\pi$  的奇延拓或偶延拓后, 则  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上可以展为正弦级数或余弦级数.

(4) 以  $2l$  为周期的可积函数  $f(x)$  的傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right),$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

## 9.2 典型习题与试题解析

**例 9.1** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)$  的敛散性.

**解析** 由于  $n \rightarrow \infty$  时

$$0 \leq a_n = 1 - \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{e^{\frac{\ln n}{n}} - 1}{\sqrt[n]{n}} \sim \frac{\ln n}{n},$$

而  $n \geq 3$  时  $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$  发散, 再应用比较判别法知原级数发散.

**例 9.2** 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$  的敛散性.

**解析** 记  $a_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ , 则  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$ , 由于数列

$\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  单调增大趋向于  $e$ , 所以  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ , 即  $a_n$  单调增大, 且  $a_n \geq e, \forall n \in \mathbf{N}$ , 于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ , 故原级数发散.

**例 9.3** 设  $\alpha$  为任意实数,  $\beta$  为非负实数, 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \beta^n$  的敛散性.

**解析** 记  $a_n = n^\alpha \beta^n$ , 则  $a_n > 0$ , 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^\alpha \beta^{n+1}}{n^\alpha \beta^n} = \beta,$$

所以当  $\beta < 1$ ,  $\alpha$  为任意实数时, 原级数收敛; 当  $\beta > 1$ ,  $\alpha$  为任意实数

时,原级数发散;当 $\beta=1$ 时,原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-\alpha}}$ ,由 $p$ 级数的敛散性知:当 $\alpha < -1$ 时原级数收敛,当 $\alpha \geq -1$ 时原级数发散.

**例 9.4** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  都收敛,且对一切 $n$ 有 $a_n \leq b_n \leq c_n$ ,

试证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛.

**解析** 由 $a_n \leq b_n \leq c_n$  可得 $0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$ ,因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  皆收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$  收敛.应用比较判别法可得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$  收敛.又因

$$b_n = a_n + (b_n - a_n),$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$  收敛.

**例 9.5** 设 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) (n = 1, 2, \dots)$ , 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  存在;

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛.

**解析** (1) 首先应用单调有界准则,证明数列 $\{a_n\}$  收敛. 因

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{1}{a_n} \right) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{1}{a_n}} = 1,$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{a_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{1^2} \right) = 1,$$

故数列 $\{a_n\}$  为单调减少有下界的数列,据单调有界准则知数列 $\{a_n\}$  收敛. 令 $x_n \rightarrow a$ , 则 $x_{n+1} \rightarrow a$ , 在原递推关系式两边取极限得 $2a = a +$

$\frac{1}{a}$ , 故  $a = 1$ . 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

(2) 由(1)知  $a_n > 1$ , 所以

$$0 \leq \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq \frac{a_n - a_{n+1}}{a_{n+1}} \leq a_n - a_{n+1},$$

记

$$S_n = \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_{n+1},$$

因  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 1$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a_1 - 1$ , 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$  收敛, 因此

由比较判别法知, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$  收敛.

**例 9.6** 设  $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$ ,

(1) 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2})$  的值;

(2) 试证: 对任意的常数  $\lambda > 0$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

**解析** (1) 因为

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x \, dx = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n(n+1)}, \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} (a_i + a_{i+2}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n + a_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

(2) 因为

$$0 < a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx \stackrel{\tan x = t}{=} \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2} dt < \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1},$$

所以

$$\frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda(n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}},$$

由  $\lambda+1 > 1$  知  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lambda+1}}$  收敛, 从而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$  收敛.

**例 9.7** 设  $a_n > 0, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ , 判别级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$  的敛散性.

**解析** 由于  $a_n > 0, S_n > 0$ , 且  $\{S_n\}$  单调增加, 所以

$$0 < \frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} \leq \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n},$$

考虑原级数的部分和

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1} + \sum_{k=2}^n \frac{a_k}{S_k^2} &= \frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{S_2^2} + \frac{a_3}{S_3^2} + \cdots + \frac{a_n}{S_n^2} \\ &\leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{S_1} - \frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_3} + \cdots + \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \\ &= \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{S_n} < \frac{2}{a_1}, \end{aligned}$$

知其部分和有上界, 所以级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$  收敛.

**例 9.8** 设  $0 \leq a_n < \frac{1}{n}$ , 则下列级数中( ) 必定收敛.

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$

**解析** (A)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  不一定收敛, 例如:  $a_n = \sin \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  是发散的;

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  不一定收敛, 例如:  $a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + (-1)^n \sin \frac{1}{n} \right)$ , 因  $0 < \sin \frac{1}{n} < \frac{1}{n}$ , 故  $0 < a_n < \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n}$ , 但是

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n} + (-1)^n \sin \frac{1}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$  收敛,  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$  发散, 因而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散;

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$  不一定收敛, 例如,  $a_n = \frac{1}{n^2}$ , 因  $\sqrt{a_n} = \frac{1}{n}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 故  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n}$  发散;

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$  必定收敛, 因为  $0 < a_n < \frac{1}{n}$ , 所以  $0 < a_n^2 < \frac{1}{n^2}$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 由比较判别法得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  收敛, 因而  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n^2$  为绝对收敛.

**例 9.9** 设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 则下列级数中( ) 必定收敛.

(A)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$

(B)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

(C)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$

(D)  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$

**解析** 应用级数的性质: 收敛级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$  逐项相加后

的新级数仍收敛,故(D)成立.其他三种情况不成立拟举反例如下:

(A):  $a_n = (-1)^n \frac{1}{\ln n}$ , 则  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$  为收敛的莱布尼兹型级数.  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  为发散级数, 这是因为

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k} \\ &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_2^{n+1} \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| \Big|_2^{+\infty} = +\infty. \end{aligned}$$

(B):  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  为收敛的莱布尼兹型级数; 而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  显然为发散级数.

(C):  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$  为收敛的莱布尼兹型级数;

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{2n-1}} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n(2n-1)}}, \end{aligned}$$

这是正项级数, 由于  $n \rightarrow \infty$  时,

$$\frac{\frac{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n(2n-1)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2(2n-1)}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2 - \frac{1}{n}}}{\sqrt{2(2 - \frac{1}{n})}} \rightarrow \sqrt{2},$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$  发散.

**例 9.10** 判定级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right)$  是绝对收敛, 条件收敛, 还是发散?

**解析**  $a_n = \sin\left(n\pi + \frac{1}{\ln n}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$ , 且  $n \geq 2$  时

$$0 < \frac{1}{\ln x} \leq \frac{1}{\ln 2} = \log_2 e < \log_2 2\sqrt{2} = \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2},$$

所以  $0 < \sin\left(\frac{1}{\ln x}\right) < 1$ , 原级数为交错级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{\ln n}} \cdot \frac{n}{\ln n} = \infty,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  发散. 即原级数非绝对收敛.

由于  $n$  增大时  $\frac{1}{\ln n}$  单调减少,  $\sin\left(\frac{1}{\ln n}\right)$  亦单调减少, 且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{\ln n}\right) = 0$ , 由莱布尼兹法则即得原级数收敛. 所以原级数为条件收敛.

**例 9.11** 讨论级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n^k}$  的敛散性 ( $k$  为常数), 试问何时发散, 何时绝对收敛, 何时条件收敛?

**解析** 记  $a_n = \frac{\ln n}{n^k}$ , 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\lambda}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{k-\lambda}} = \begin{cases} 0, & \text{当 } k > \lambda > 1, \\ \infty, & \text{当 } k \leq \lambda \leq 1. \end{cases}$$

由比值判别法得:  $k > 1$  时  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛, 即原级数绝对收敛;  $k \leq 1$  时,

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散, 因而原级数非绝对收敛.



当  $0 < k \leq 1$  时, 由于

$$\left(\frac{\ln x}{x^k}\right)' = \frac{x^{k-1}(1-k\ln x)}{x^{2k}} = \frac{1-k\ln x}{x^{k+1}},$$

故  $x > e^{\frac{1}{k}}$  时  $\left(\frac{\ln x}{x^k}\right)' < 0$ , 于是当  $n$  充分大时,  $a_n$  单调减少, 且由洛必达法则,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^k} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{kx^k} = 0,$$

因而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 据莱布尼兹法则得原级数收敛, 即  $0 < k \leq 1$  时原级数为条件收敛.

当  $k \leq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^k} = \infty$ , 此时原级数发散.

**例 9.12** 设正项数列  $\{a_n\}$  单调减少, 且  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散, 试问级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$  是否收敛? 并说明理由.

**解析** 由于正项数列  $\{a_n\}$  单调减少有下界, 故  $\{a_n\}$  收敛, 记

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

则  $a \geq 0$ . 若  $a = 0$ , 则由莱布尼兹判别法知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛, 与题设矛盾, 故  $a > 0$ . 于是

$$\frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{a+1} < 1$$

从而

$$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n < \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$  是公比为  $\frac{1}{a+1} < 1$  的几何级数, 故收敛. 因此由比较判别法知原级数收敛.

**评注** 上述证明中,关键的一步是证明  $a > 0$ . 若直接由  $a_n > 0$ ,  $\frac{1}{a_n+1} < 1$ , 就说  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$  是公比  $< 1$  的几何级数是错误的.

**例 9.13** 设偶函数  $f(x)$  的二阶导数  $f''(x)$  在  $x=0$  的某邻域内连续, 且  $f(0)=1, f''(0)=2$ , 试证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$  绝对收敛.

**解析**  $f(x)$  为偶函数, 则  $f'(x)$  为奇函数,

$$f'(-x) = -f'(x),$$

取  $x=0$ , 得  $f'(0)=0$ , 函数  $f(x)$  在  $x=0$  的一阶马克劳林展式为

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \\ &= 1 + \frac{f''(\theta x)}{2}x^2 \quad (0 < \theta < 1), \end{aligned}$$

令  $x = \frac{1}{n}$  得

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right| = \frac{1}{2} \left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right| \frac{1}{n^2}.$$

由于  $f''(x)$  在  $x=0$  连续, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} f''\left(\frac{\theta}{n}\right) = f''(0) = 2$ , 于是

$\exists N \in \mathbf{N}$ , 当  $n > N$  时,  $\left|f''\left(\frac{\theta}{n}\right)\right| < 3$ ,

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right| < \frac{3}{2} \frac{1}{n^2},$$

而级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 故由比较判别法得  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$  绝对收敛,

于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]$  亦绝对收敛.

**例 9.14** 设  $\alpha$  为正实数, 讨论级数

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6^\alpha} + \cdots$$

的敛散性.

**解析**  $\alpha = 1$  时, 原级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ , 应用莱布尼兹判别法知其收敛.

$\alpha > 1$  时, 考虑加括号的级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^\alpha} \right)$ , 由于  $n \rightarrow \infty$  时,  $\frac{1}{2n-1}$  与  $\frac{1}{n}$  同阶,  $\frac{1}{(2n)^\alpha}$  与  $\frac{1}{n^\alpha}$  ( $\alpha > 1$ ) 同阶, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$  发散,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^\alpha}$  收敛, 于是  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{(2n)^\alpha} \right)$  发散, 因而原级数在  $\alpha > 1$  时发散.

$\alpha < 1$  时, 考虑加括号的级数  $1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n)^\alpha} - \frac{1}{2n+1} \right)$ , 由于  $a_n = \frac{1}{(2n)^\alpha} - \frac{1}{2n+1} > 0$ , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^\alpha} - \frac{n^\alpha}{2n+1} \right) = \frac{1}{2^\alpha},$$

且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ( $\alpha < 1$ ) 发散, 所以  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散,  $1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散, 因而原级数在  $\alpha < 1$  时发散.

综上得, 原级数仅当  $\alpha = 1$  时收敛.

**例 9.15** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + (-2)^n} \frac{x^n}{n}$  的收敛域.

**解析** 应用求收敛半径公式, 因为

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[3^n + (-2)^n]n}{[3^{n+1} + (-2)^{n+1}](n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[1 + (-\frac{2}{3})^n]n}{3[1 + (-\frac{2}{3})^{n+1}](n+1)} = \frac{1}{3}, \end{aligned}$$

所以收敛半径为 3, 收敛区间为  $(-3, 3)$ .

当  $x = 3$  时, 因为  $\frac{3^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} > \frac{1}{2n}$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 所以原级数在点  $x = 3$  处发散.

当  $x = -3$  时, 由于  $\frac{(-3)^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n} = (-1)^n \frac{1}{n} - \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$ , 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  显然收敛; 下面来证明  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$  收敛. 应用根值判别法, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \\ &= \frac{2}{3} < 1, \end{aligned}$$

所以  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n + (-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$  收敛. 于是原级数在点  $x = -3$  处收敛. 故原级数的收敛域为  $[-3, 3)$ .

**例 9.16** 对  $p$  讨论幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n} x^n$  的收敛域.

**解析** 记  $a_n = \frac{1}{n^p \ln n}$ , 则幂级数  $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$  的收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^p \ln(n+1)}{n^p \ln n} = 1, \quad \forall p \in \mathbf{R}.$$

所以  $|x| < 1$  时原级数收敛,  $|x| > 1$  时原级数发散.

当  $x = 1$  时, 若  $p = 1$ , 由于

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \ln |\ln x| \Big|_2^{+\infty} = +\infty,$$

应用积分判别法得  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  发散; 若  $p < 1$ , 因  $\frac{1}{n^p \ln n} > \frac{1}{n \ln n}$ , 应用

比较判别法得  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$  发散; 当  $p > 1$  时, 因  $\frac{1}{n^p \ln n} < \frac{1}{n^p} (n \geq 3)$ , 而

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^p}$  在  $p > 1$  时收敛, 由比较判别法得  $p > 1$  时  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$  收敛.

当  $x = -1$  时, 原级数为  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \ln n}$ , 当  $p > 1$  时, 因  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p \ln n}$  收敛, 所以  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛; 当  $0 \leq p \leq 1$  时, 由于  $a_n = \frac{1}{n^p \ln n}$  单调减

少,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , 应用莱布尼兹法则得  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$  收敛; 当  $p < 0$  时,

由于  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p \ln n} = +\infty$ , 因而  $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$  发散.

综上可得:  $p < 0$  时收敛域为  $(-1, 1)$ ;  $0 \leq p \leq 1$  时收敛域为  $[-1, 1]$ ;  $p > 1$  时收敛域为  $[-1, 1]$ .

**例 9.17** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} x^n$  的收敛域.

**解析** 由于  $0 < \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < n$ , 所以

$$\frac{1}{n} |x|^n \leq \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} |x|^n \leq n |x|^n. \quad (1)$$

幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$  的收敛半径  $R$  显然都等于 1. 由 (1) 式即得原级数的收敛半径  $R$  也等于 1. 当  $x = 1$  时, 由于

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} > \frac{1}{n},$$

而调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散, 由比较判别法得原级数在  $x = 1$  处发散; 当

$x = -1$  时, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}}, \quad (2)$$

由于  $a_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}} \rightarrow 0$ , 且数列  $\{a_n\}$  单调减, 所以级数 (2) 是收敛的莱布尼兹型级数. 故原级数的收敛域为  $[-1, 1)$ .

**例 9.18** 求广义幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{3n}\right) \left(\frac{3+x}{3-2x}\right)^n$  的收敛域.

**解析** 令  $\frac{3+x}{3-2x} = y$ , 原级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{1}{3n}\right) y^n$ , 其收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\sin \frac{1}{3n}}{\sin \frac{1}{3n+3}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+3}{3n} = 1,$$

因而  $\left| \frac{3+x}{3-2x} \right| = |y| < 1$  时级数收敛, 即  $x < 0$  或  $x > 6$  时原级数收敛.

当  $x = 0$  时, 级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{3n}$ , 它与调和级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  敛散性相同, 因而发散;  $x = 6$  时, 级数化为  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{3n}$ , 显见为莱布尼兹型级数, 因而收敛. 故原级数的收敛域为

$$\{x \mid x < 0 \text{ 或 } x \geq 6\}.$$

**例 9.19** 求幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$  的收敛域, 并求和函数.

**解析** 记  $a_n = \frac{n^2}{n!}$ , 则幂级数的收敛半径

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(n+1)!}{n!(n+1)^2} = \infty,$$

所以收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ . 令原级数的和为  $f(x)$ , 则逐项积分再求

导得

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^n = x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} x^{n-1} \right) \\ &= x \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n \right)' = x(xe^x)' \\ &= x(1+x)e^x, \quad x \in (-\infty, +\infty). \end{aligned}$$

**例 9.20** 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$$

的收敛域,并求和函数.

**解析** 令  $u_n = (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)(2n-1)}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}(2n+1)(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+3)(2n+1)} = x^2,$$

所以  $x^2 < 1$  时原级数收敛,  $x^2 > 1$  时原级数发散. 而  $x = \pm 1$  时, 原级数绝对收敛 (与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  同敛散性), 故原级数的收敛域为  $[-1, 1]$ , 令原式的和函数为  $f(x)$ , 则当  $x \neq 0$  且  $x \in [-1, +1)$  时, 逐项求导再积分得

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{x^{2n-1}}{2n-1} \right)' dx - \\ &\quad \frac{1}{2x^2} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left( \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right)' dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^{n-1} dx + \frac{1}{2x^2} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2)^n dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2x^2} \int_0^x \frac{-x^2}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \arctan x - \frac{1}{2x^2} (x - \arctan x) \\
 &= -\frac{1}{2x} + \frac{1+x^2}{2x^2} \arctan x,
 \end{aligned}$$

$x=0$  时  $f(0)=0$ .

**例 9.21** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$  的和函数.

**解析** 收敛半径  $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} = 1$ ,  $x = \pm 1$  时原级数显见发散, 所以收敛域为  $(-1, 1)$ . 令原级数的和函数为  $f(x)$ , 则逐项积分再求导得

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' = \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^{n+1} \right)' \\
 &= \left[ x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)' \right]' \\
 &= \left[ x \left( \frac{x}{1-x} \right)' \right]' = \left( \frac{x}{(1-x)^2} \right)' \\
 &= \frac{1+x}{(1-x)^3}, \quad |x| < 1.
 \end{aligned}$$

**例 9.22** 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$  的和函数.

**解析** 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!},$$

则  $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}$ ,  $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}$ , 于是

$$f''(x) + f'(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad (1)$$

此微分方程的特征方程为  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  (见 10.1.3), 其特征值为



$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ , 故余函数为

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right).$$

又方程(1)有特解  $\tilde{y} = Ae^x$ , 代入(1)式求得  $A = \frac{1}{3}$ . 于是  $\tilde{y} = \frac{1}{3}e^x$ .

方程(1)的通解为

$$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left( C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right) + \frac{1}{3}e^x.$$

由于  $f(0) = 1, f'(0) = 0$ , 代入上式可求得  $C_1 = \frac{2}{3}, C_2 = 0$ , 于是所求的和函数为

$$f(x) = \frac{2}{3}e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{3}e^x.$$

**例 9.23** 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n}$  的和.

**解析** 因为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n^2 - n + 1)}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \left(-\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

其中

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

设

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}, \quad x \in (-1, 1),$$

则

$$\int_0^x \left[ \int_0^x S(x) dx \right] dx = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x},$$

故

$$S(x) = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1, 1),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{4}{27},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - n + 1)}{2^n} = \frac{4}{27} + \frac{2}{3} = \frac{22}{27}.$$

**例 9.24** 设幂级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$  的收敛域为  $[-1, 1]$ , 求幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$  的收敛域.

**解析** 由于  $\left|\frac{a_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2}\right)$ , 而  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  皆收敛, 由

比较判别法得  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$  (绝对) 收敛, 即级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$  在  $x = \pm 1$  处收敛.

另一方面, 任取  $x_0$ , 使得  $|x_0| > 1$ , 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x_0^n$  是发散的. 事实

上, 假设不然, 设  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x_0^n$  收敛, 取  $r, r_1$ , 使得  $1 < |r| < |r_1| < |x_0|$ ,

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{a_n r_1^n}{n}\right|$  收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = 0,$$

所以  $n$  充分大时,  $|a_n| < 1$ ,  $\left|n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n\right| < 1$ , 于是

$$|a_n^2 r^n| = \left|\frac{a_n r_1^n}{n}\right| \left|a_n n \left(\frac{r}{r_1}\right)^n\right| \leq \left|\frac{a_n r_1^n}{n}\right|,$$

由比较判别法得  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 r^n$  收敛, 此与条件:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 x^n$  在  $|x| > 1$  时发散矛盾. 因此级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$  的收敛域为  $[-1, 1]$ .

**例 9.25** 求函数  $f(x) = \arctan \frac{1+x}{1-x}$  的幂级数展式, 并指出收敛域.

**解析** 因  $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ , 所以

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

应用逐项求积分得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in [-1, 1). \end{aligned}$$

**例 9.26** 将函数  $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \arctan x - x$  展开成  $x$  的幂级数.

**解析** 因为

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2} - 1 \\ &= \frac{1}{1-x^4} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} \quad (-1 < x < 1), \end{aligned}$$

且  $f(0) = 0$ , 故

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x f'(x) dx \\ &= \int_0^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} x^{4n} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

例 9.27 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$$

试将  $f(x)$  展开成  $x$  的幂级数, 并求级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$  的和.

解析 因

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1, 1),$$

应用幂级数在收敛区间内可逐项积分的性质得

$$\arctan x = \int_0^x (\arctan x)' dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

于是  $f(x)$  的幂级数展开式为

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+2} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n} \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} x^{2n}, \quad x \in [-1, 1], \end{aligned}$$

取  $x = 1$  即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2} [f(1) - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

例 9.28 求函数  $G(x) = \frac{d}{dx} \frac{\cos x - 1}{x}$  的幂级数展式, 指出其收敛域, 并利用此展开式求出级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}$  的和.

解析 因为  $|x| < +\infty$  时,

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - 1}{x} &= -\frac{1}{2!}x + \frac{1}{4!}x^3 - \frac{1}{6!}x^5 + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} x^{2n-1},\end{aligned}$$

两边求导(右端逐项求导)得  $G(x)$  的幂级数展式为

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} x^{2(n-1)}, \quad |x| < +\infty.$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} x^{2n} = x^2 G(x) = 1 - \cos x - x \sin x,$$

令  $x = \frac{\pi}{2}$  即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{2}.$$

**例 9.29** 将函数  $f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$  在  $x=1$  处展为幂级数, 并确定收敛域.

**解析** 令  $x-1=u$ , 则  $x=1+u$ ,

$$f(x) = F(u) = \frac{1}{(2+u)^2},$$

因

$$\begin{aligned}\int_0^u F(u) du &= \int_0^u \frac{1}{(2+u)^2} du = -\frac{1}{2+u} \Big|_0^u \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+\frac{u}{2}} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n} u^n \quad (|u| < 2).\end{aligned}$$

两端求导得

$$\begin{aligned}
 F(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} nu^{n-1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+2} (n+1)u^n \quad (|u| < 2).
 \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)}{2^{n+2}} (x-1)^n, \quad -1 < x < 3. \quad (1)$$

当  $x = -1$  时, 上式右端  $= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4} (n+1)$ , 显见发散; 当  $x = 3$  时, 上式右端  $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{4}$ , 仍然发散. 故  $f(x)$  在  $x = 1$  处的幂级数展式为(1)式, 其收敛域为  $(-1, 3)$ .

**例 9.30** 求函数  $f(x)$ , 使之满足方程

$$\int_x^{2x} f(x) dx = e^x - 1.$$

**解析** 上式两边对  $x$  求导得  $2f(2x) - f(x) = e^x$ , 令  $f(x) =$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 代入上式得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n 2^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (2^{n+1} - 1) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad |x| < \infty,$$

令两边同次幂的系数分别相等得

$$a_n = \frac{1}{(2^{n+1} - 1)n!},$$

于是

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{n+1} - 1)n!} x^n, \quad |x| < \infty.$$

**例 9.31** 将  $\cos x$  在  $0 < x < \pi$  内展开为以  $2\pi$  为周期的正弦级数, 并在  $-2\pi \leq x \leq 2\pi$  上写出该级数的和函数.

**解析** 将函数  $\cos x$  在  $-\pi < x < 0$  上作奇延拓, 再在  $(-\infty, +\infty)$  上作周期  $2\pi$  的延拓, 则  $a_n = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), 且

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \cos 2x \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} (1 - 1) = 0, \end{aligned}$$

$n \geq 2$  时,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos x \sin nx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)x + \sin(n-1)x] dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \left( \frac{\cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n-1} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] \\ &= \frac{2n}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1}. \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} n \sin nx \\ &= \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2nx \\ &= \begin{cases} \cos x, & -2\pi < x < -\pi, \quad 0 < x < \pi, \\ -\cos x, & -\pi < x < 0, \quad \pi < x < 2\pi, \\ 0, & x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

**例 9.32** 将  $f(x) = 2 + |x|$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) 展开为以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  的和.

**解析**  $f(x)$  是周期为 2 的连续函数, 且是偶函数, 故  $f(x)$  的傅里叶级数为余弦级数 ( $b_n = 0, n = 1, 2, \dots$ ).

$$a_0 = 2 \int_0^1 (x+2) dx = 5,$$

$$a_n = 2 \int_0^1 (x+2) \cos n\pi x dx$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[ (x+2) \sin n\pi x + \frac{1}{n\pi} \cos n\pi x \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n^2 \pi^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n = 2m, \\ -\frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2}, & \text{当 } n = 2m+1, \end{cases}$$

于是  $f(x)$  的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} 2 + |x| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1} \cos (2m+1)\pi x \\ &= \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos (2m+1)\pi x, \quad |x| < \infty. \end{aligned}$$

令  $x = 0$  可得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

因  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$



**例 9.33** 应当如何把区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  内的函数  $f(x)$  延拓, 方便它的傅里叶级数有如下形式:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

**解析** 按题设要求,  $f(x)$  必须是周期为  $2\pi$  的偶函数. 先将  $f(x)$  延拓到  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 设在此区间上的延拓函数为  $g(x)$ . 再在  $(-\pi, 0)$  上作偶延拓, 则  $b_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$ . 令  $a_{2n} = 0 (n = 0, 1, 2, \dots)$ , 即

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nx \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nx \, dx \right] \\ &\quad (\text{在第一项积分中令 } x = \pi - u) \\ &= \frac{2}{\pi} \left[ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(\pi - x) + g(x)) \cos 2nx \, dx \right] \\ &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

由此可得

$$g(x) = -f(\pi - x), \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

于是对  $f(x)$  应作如下延拓, 使之成为  $F(x)$ :

$$F(x) = \begin{cases} -f(\pi - x), & \frac{\pi}{2} < x < \pi, \\ f(x), & 0 < x < \frac{\pi}{2}, \\ f(-x), & -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ -f(\pi + x), & -\pi < x < -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

# 10

## 常微分方程

### 10.1 基本概念与内容提要

#### 1) 基本概念

(1) 微分方程的定义, 微分方程的“阶”, 微分方程的通解、特解, 初值条件.

$n$  阶微分方程

$$y^{(n)} = f(x; y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

的含  $n$  个独立的任意常数的解称为该微分方程的通解.

若给出初值条件:

$$x = x_0 \text{ 时 } y = y_0, y' = y_1, \dots, y^{(n-1)} = y_{n-1}, \quad (2)$$

这里  $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$  是已知常数, 则微分方程(1) 满足条件(2) 的解称为特解.

(2) 根据已知条件建立微分方程.

(3) \* 线性与非线性微分方程.

一阶线性微分方程的标准形式是

$$y' + P(x)y = Q(x);$$

二阶线性微分方程的标准形式是

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x).$$

线性方程的特征是关于未知函数以及它的各阶导数是一次方程, 其系数与非齐次项是自变量的已知函数. 上述两个方程是关于  $y$  的一阶与二阶线性方程. 当方程右端的非齐次项  $Q(x)$  或  $f(x)$  恒等

于 0 时称为线性齐次方程, 否则称为线性非齐次方程.

## 2) 一阶方程

(1) \* 变量可分离的方程.

变量可分离的方程总可化为

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

的形式, 两边积分即得隐函数形式的通解

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C,$$

这里左端的积分只要求一个原函数.

(2) 齐次方程.

齐次方程总可化为

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形式. 作未知函数的变换  $y = xu$ , 则原方程化为变量可分离的方程

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

(3) \* 一阶线性方程.

一阶线性方程的标准形式为

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

其通解公式为

$$y = e^{-\int P(x)dx} \left( C + \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx \right).$$

(4) 伯努利方程.

伯努利方程的标准形式为

$$y' + P(x)y = Q(x)y^\lambda \quad (\lambda \neq 0, 1),$$

解此方程的方法是作未知函数的变换, 令  $y^{1-\lambda} = u$ , 则方程化为一阶线性方程

$$\frac{du}{dx} + (1-\lambda)P(x)u = (1-\lambda)Q(x).$$

## (5) 全微分方程.

微分方程

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

为全微分方程的充要条件是  $Q'_x = P'_y$ . 全微分方程的通解为

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C,$$

或

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C.$$

这里  $(x_0, y_0)$  是使  $P, Q$  一阶连续可微的区域上的任一点.

(6) 其他特殊形式. 如  $y' = f(x+y+a)$  可令  $x+y+a = u$ , 方程化为  $u' = 1 + f(u)$ .

## 3) 二阶方程

(1) \* 用降阶法解特殊的二阶方程.

(i) 对于形如  $y'' = f(x, y')$  的方程, 令  $y' = u$ , 则  $y'' = u'$ , 原方程化为  $u' = f(x, u)$ . 若此一阶方程的通解可求出, 记为  $u = \varphi(x, C_1)$ , 则原方程的通解为

$$y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2.$$

(ii) 对于形如  $y'' = f(y, y')$  的方程, 令  $y' = u$ , 则  $y'' = u \frac{du}{dy}$ , 原方程化为  $u \frac{du}{dy} = f(y, u)$ , 这是以  $y$  为自变量,  $u$  为未知函数的一阶方程. 若此方程的通解可求出, 记为  $u = \varphi(y, C_1)$ , 则有

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1),$$

通过分离变量法可求得原方程的通解.

(2) \* 二阶线性方程通解的结构.

二阶线性方程的标准形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

(1)



$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \quad (2)$$

方程(1)称为线性非齐次方程,方程(2)称为线性齐次方程,或称方程(2)为方程(1)所对应的齐次方程.常称方程(2)的通解为方程(1)的余函数.

(i) 线性齐次方程通解的结构.

**定理 1** 线性齐次方程(2)的通解等于它的两个线性无关解的线性组合.即若  $y_1(x), y_2(x)$  是方程(2)的两个线性无关解,则方程(2)的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

(ii) 线性非齐次方程通解的结构.

**定理 2** 线性非齐次方程(1)的通解等于它的余函数加上方程(1)的一个特解.即若  $y_1(x)$  与  $y_2(x)$  是方程(2)的两个线性无关解,则  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  是方程(1)的余函数,又  $\tilde{y}(x)$  是方程(1)的任一特解,则方程(1)的通解为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}(x).$$

(iii) 叠加原理与其他性质.

**定理 3** 方程(1)中  $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$  时,若

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_i(x)$$

有特解  $\tilde{y}_i(x) (i = 1, 2)$ , 则方程(1)有特解  $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$ .

**定理 4** 方程(1)的任意两个特解的差是对应的齐次方程(2)的一个特解.方程(1)的任意两个特解的平均值仍是方程(1)的一个特解.

(3) \* 二阶常系数线性方程的通解.

方程的标准形式为

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (3)$$

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (4)$$

这里  $p, q$  为实常数;  $f(x)$  为多项式、指数函数、三角(正弦与余弦)函数或它们的乘积.

(i) 线性齐次方程(4)的通解. 方程(4)的特征方程为

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \quad (5)$$

当  $p^2 > 4q$  时, 方程(5)有两个相异的实根  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 \neq \lambda_2)$ , 此时方程(4)的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x};$$

当  $p^2 = 4q$  时, 方程(5)有两个相等的实根  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2 (\lambda_1 = \lambda_2)$ , 此时方程(4)的通解为

$$y = e^{\lambda_1 x} (C_1 + C_2 x);$$

当  $p^2 < 4q$  时, 方程(5)有两个共轭复根  $\lambda = \alpha + i\beta (\alpha, \beta \in \mathbf{R})$ , 此时方程(4)的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

(ii) 线性非齐次方程(3)的特解  $\tilde{y}(x)$ . 当  $f(x)$  是多项式、指数函数、三角函数时, 特解  $\tilde{y}(x)$  与  $f(x)$  有相同的形式或在此相同形式前乘以  $x^k (k = 1, 2)$ . 具体形式见下表:

| $f(x)$                                             | $\tilde{y}(x)$                                                       |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ | $x^k (A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n), \lambda = 0$ 为 $k$ 重特征根 |
| $a e^{\alpha x}$                                   | $A x^k e^{\alpha x}, \lambda = \alpha$ 为 $k$ 重特征根                    |
| $a \cos \beta x + b \sin \beta x$                  | $x^k (A \cos \beta x + B \sin \beta x), \lambda = i\beta$ 为 $k$ 重特征根 |

这里  $k = 0, 1, 2$ , 当  $k = 0$  时表示上述  $\lambda = 0$ , 或  $\alpha$ , 或  $i\beta$  不是特征根,  $A_0, \cdots, A_n, A, B$  均为待定常数.

当  $f(x)$  是上述三类函数的乘积时, 特解  $\tilde{y}(x)$  是对应的特解形式的乘积. 例如

$$f(x) = e^{2x} (x-1) \cos \sqrt{2} x$$

时, 特解为

$$\tilde{y}(x) = e^{2x} x^k [(Ax + B) \cos \sqrt{2} x + (Cx + D) \sin \sqrt{2} x],$$

这里  $k = 0, 1$ . 当  $\lambda = 2 + \sqrt{2}i$  不是特征根时  $k = 0$ , 当  $\lambda = 2 + \sqrt{2}i$  是

特征根时  $k=1$ ;  $A, B, C, D$  为待定常数.

上述求特解  $\tilde{y}(x)$  的方法称为待定系数法.

下面叙述求特解  $\tilde{y}(x)$  的算子公式法:

记  $L(D) = D^2 + pD + q$  ( $D = \frac{d}{dx}, D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ ), 则有

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{L(D)} f(x).$$

$$1^\circ \quad \frac{1}{D-\alpha} f(x) = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x) dx;$$

$$2^\circ \quad \frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{1}{L(\alpha)} e^{\alpha x} \quad (L(\alpha) \neq 0);$$

$$3^\circ \quad L(\alpha) = L'(\alpha) = \cdots = L^{(k-1)}(\alpha) = 0, L^{(k)}(\alpha) \neq 0 \text{ 时},$$

$$\frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} = \frac{x^k}{L^{(k)}(\alpha)} e^{\alpha x};$$

$$4^\circ \quad \frac{1}{L(D)} e^{\alpha x} \varphi(x) = e^{\alpha x} \frac{1}{L(D+\alpha)} \varphi(x);$$

$$5^\circ \quad \frac{1}{L(D)} [(e^{\alpha x} \cos \beta x) \varphi(x)] = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{L(D)} e^{(\alpha+i\beta)x} \varphi(x) \right\},$$

$$\frac{1}{L(D)} [(e^{\alpha x} \sin \beta x) \varphi(x)] = \operatorname{Im} \left\{ \frac{1}{L(D)} e^{(\alpha+i\beta)x} \varphi(x) \right\};$$

$$6^\circ \quad \text{若 } L(x) = q + px + x^2 \quad (q \neq 0), f(x) \text{ 为 } m \text{ 次多项式},$$

$$\frac{1}{L(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{L(x)},$$

这里  $Q(x)$  为次数  $\leq m$  的多项式,  $R(x)$  的最低幂次数  $\geq m+1$ , 则

$$\frac{1}{L(D)} f(x) = Q(D) f(x).$$

最后介绍求一般的二阶线性方程特解  $\tilde{y}(x)$  的常数变易法:

若已知二阶线性齐次方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

有基本解组  $y_1(x), y_2(x)$ , 则线性非齐次方程

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x)$$

有特解  $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ , 其中  $C_1(x), C_2(x)$  由方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

解出.

#### 4) 高于二阶的常系数线性齐次方程

对于方程

$$y^{(n)} + p_1y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_ny = 0,$$

这里  $p_i$  为实常数, 其解题步骤可仿二阶常系数线性齐次方程进行. 特征方程为

$$\lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \cdots + p_{n-1}\lambda + p_n = 0,$$

求出特征方程的根(即特征根). 当  $\lambda = \alpha$  是  $k$  重实根时, 对应的有  $k$  个线性无关解为

$$e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \cdots, x^{k-1}e^{\alpha x},$$

这里  $1 \leq k \leq n$ ; 当  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  是单根时, 对应的有两个线性无关解为

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \text{ 与 } e^{\alpha x} \sin \beta x;$$

当  $\lambda = \alpha + i\beta$  为二重根时, 对应的有四个线性无关解

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} x \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, e^{\alpha x} x \sin \beta x;$$

$\lambda = \alpha + i\beta$  为  $k$  重根时, 可仿照上述方法列出对应的  $2k$  个线性无关解. 将所有特征根对应的全部线性无关解列出后, 它们组成原方程的一个基本解组, 基本解组中含有  $n$  个线性无关解, 它们的线性组合即为原方程的通解.

#### 5) 欧拉方程

二阶欧拉方程的标准形式为

$$x^2y'' + pxy' + qy = f(x),$$

作自变量的变换  $x = e^t$ , 令  $D = \frac{d}{dt}$ ,  $D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ , 则

$$xy' = Dy, \quad x^2y'' = D(D-1)y,$$





代入原欧拉方程化为

$$[D(D-1) + pD + q]y = f(e^t),$$

此是二阶常系数线性方程,应用上述第3)条所述方法求得通解后,用  $t = \ln x$  代入,即得原方程的通解.

上述方法中需  $x > 0$ , 当  $x < 0$  时,令  $x = -e^t$ ,其他和前述步骤一样进行.

### 6) 微分方程组<sup>①</sup>

这里只介绍含两个未知函数的一阶常系数线性微分方程组,其标准形式为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by + f(t), \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy + g(t). \end{cases}$$

可用消去法求解,将第一式两边对  $t$  求导得

$$x'' = ax' + by' + f'(t),$$

利用原方程组化简上式得二阶常系数线性方程

$$x'' - (a+d)x' + (ad-bc)x = bg(t) - df(t) + f'(t),$$

求得通解  $x = x(t; C_1, C_2)$  后,应用代数运算和求导运算可得  $y$  的表达式

$$y = \frac{1}{b}(x' - ax - f(t)) = y(t; C_1, C_2).$$

### 7) \* 微分方程的应用

#### (1) 求函数表达式.

根据已知条件,运用微积分知识,导出未知函数所满足的微分方程和初值条件,然后求解此初值问题即得所求的函数表达式.

#### (2) 几何上的应用.

在几何上常常需求满足一定条件的曲线,这些条件通常与曲线

<sup>①</sup> 这里 <sup>①</sup> 对考研不作要求.

的切线性质或曲线所围的面积有关,我们用  $y = f(x)$  表示所求曲线,根据已知条件找出  $x, y$  与  $y'$  之间的关系式,这就是微分方程,然后求解此方程即得所求之曲线.

(3) 物理上的应用.

求解与微分方程有关的物理问题,首先用  $x, t$  表示有关的物理量( $t$  为时间),然后应用导数的物理意义(例如速度,变化率,加速度等)以及有关的物理定律建立微分方程,然后再求解.

## 10.2 典型习题与试题解析

**例 10.1** 求下列曲线族所满足的微分方程(其中,  $C, C_1, C_2$  为任意常数):

$$(1) (x+C)^2 + y^2 = 1; \quad (2) y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

**解析** 欲求曲线族所满足的微分方程,其方法是将曲线族方程两边对  $x$  求导,并将其与原曲线族方程联列起来消去任意常数,即得所求的微分方程.若曲线族中含有一个任意常数,则求导一次,得到一阶微分方程;若曲线族中含有两个任意常数,则需求导两次,得到二阶微分方程,余类推.

(1) 原式两边求导得

$$2(x+C) + 2yy' = 0,$$

与原式联列消去  $C$  得

$$y^2(1+y'^2) = 1$$

为所求的微分方程.

(2) 原式两边求导两次分别得

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x},$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x},$$

与原式联列消去  $C_1, C_2$  得  $y'' - y = 0$  为所求的微分方程.

**例 10.2** 已知函数  $y = y(x)$  在任意点  $x$  处的增量  $\Delta y = \frac{y\Delta x}{1+x^2}$

$+\alpha$ , 其中  $\alpha$  是  $\Delta x (\Delta x \rightarrow 0)$  的高阶无穷小, 且  $y(0) = \pi$ , 求  $y(1)$ .

**解析** 由题意可先导出函数  $f(x)$  所满足的微分方程, 并求解, 然后再求  $y(1)$  的值.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{y}{1+x^2} + \frac{\alpha}{\Delta x} \right) = \frac{y}{1+x^2},$$

这是变量可分离的微分方程, 分离变量再积分得

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x^2}, \quad \ln |y| = \arctan x + C,$$

由于  $y(0) = \pi$ , 所以  $C = \ln \pi$ ,  $y = \pi e^{\arctan x}$ , 于是

$$y(1) = \pi e^{\frac{\pi}{4}}.$$

**例 10.3** 求微分方程  $(3x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy)dy = 0$  的通解.

**解析** 这是齐次方程, 令  $y = xu$ , 则原方程化为

$$x \frac{du}{dx} + u = \frac{y^2 - 2xy - 3x^2}{x^2 - 2xy} = \frac{u^2 - 2u - 3}{1 - 2u},$$

即

$$x \frac{du}{dx} = -\frac{3(u^2 - u - 1)}{2u - 1},$$

分离变量解之得

$$u^2 - u - 1 = Cx^{-3},$$

即得所求通解为

$$y^2 - xy - x^2 = Cx^{-1} \quad (\text{或 } xy^2 - x^2y - x^3 = C).$$

**例 10.4** 设  $y = e^x$  是微分方程  $xy' + P(x)y = x$  的一个特解, 求此方程满足初值条件  $y \Big|_{x=\ln 2} = 0$  的特解.

**解析** 将  $y = e^x$  代入原方程可解得

$$P(x) = x(e^{-x} - 1).$$

由于线性齐次方程  $y' + (e^{-x} - 1)y = 0$  的通解为

$$y = Ce^{-\int(e^{-x}-1)dx} = Ce^{e^{-x}+x},$$

所以原方程的通解为

$$y = Ce^{e^{-x}+x} + e^x,$$

令  $x = \ln 2$  得  $C = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ , 所求特解为

$$y = e^x - \frac{1}{\sqrt{e}}e^{e^{-x}+x}.$$

**例 10.5** 求微分方程  $(x^2 - 1)dy + (2xy - \cos x)dx = 0$  满足初始条件  $y \Big|_{x=0} = 1$  的特解.

**解析** 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2 - 1}y = \frac{\cos x}{x^2 - 1},$$

这是一阶线性微分方程, 其通解为

$$y = e^{-\int \frac{2x}{x^2-1}dx} \left( \int e^{\int \frac{2x}{x^2-1}dx} \frac{\cos x}{x^2-1} dx + C \right) = \frac{\sin x + C}{x^2 - 1},$$

由  $y \Big|_{x=0} = 1$ , 得  $C = -1$ , 故满足初始条件的特解是

$$y = \frac{\sin x - 1}{x^2 - 1}.$$

**例 10.6** 求微分方程  $(y - x^3)dx - 2xdy = 0$  的通解.

**解析** 原方程化为一阶线性方程

$$y' - \frac{1}{2x}y = -\frac{x^2}{2},$$

应用通解公式, 其通解为:

$$y = e^{\int \frac{1}{2x}dx} \left( \int -\frac{x^2}{2} e^{-\int \frac{1}{2x}dx} dx + C \right),$$

当  $x > 0$  时,

$$y = \sqrt{x} \left( -\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + C \right) = C\sqrt{x} - \frac{1}{5}x^3;$$

当  $x < 0$  时,

$$y = \sqrt{-x} \left( \frac{1}{5} (-x)^{\frac{3}{2}} + C \right) = C \sqrt{-x} - \frac{1}{5} x^3;$$

于是所求通解为

$$y = C \sqrt{|x|} - \frac{1}{5} x^3.$$

**例 10.7** 设  $f(x)$  为连续函数,

(1) 求初值问题  $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$  的解  $y(x)$ , 其中  $a$  是正常数;

(2) 若  $|f(x)| \leq k$  ( $k$  为常数), 证明当  $x \geq 0$  时有  $|y(x)| \leq \frac{k}{a}(1 - e^{-ax})$ .

**解析** 应用一阶线性方程求通解的公式得

$$y(x) = e^{-ax} \left[ \int_0^x f(t) e^{at} dt + C \right],$$

由于  $y(0) = 0$ , 得  $C = 0$ . 故所求特解为

$$y(x) = e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt.$$

当  $x \geq 0$  时,

$$\begin{aligned} |y(x)| &\leq e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \\ &\leq k e^{-ax} \int_0^x e^{at} dt \leq \frac{k}{a} e^{-ax} (e^{ax} - 1) = \frac{k}{a} (1 - e^{-ax}). \end{aligned}$$

**例 10.8** 求方程  $ydx + (x^2y - x)dy = 0$  的通解.

**解析** 方法 I 原方程化为

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -x^2,$$

这是关于未知函数  $x$  的伯努利方程, 令  $x^{-1} = u$ , 方程化为关于  $u$  的一阶线性方程

$$\frac{du}{dy} + \frac{1}{y}u = 1,$$

应用通解公式得

$$u = e^{-\int \frac{1}{y} dy} \left( C + \int e^{\int \frac{1}{y} dy} dy \right) = \frac{1}{y} \left( C + \int y dy \right) = \frac{C}{y} + \frac{1}{2}y,$$

于是原方程的通解为

$$y = Cx + \frac{1}{2}xy^2.$$

**方法 II** 原方程写为

$$\frac{x dy - y dx}{x^2} = y dy,$$

用凑微分的方法,上式化为

$$d \frac{y}{x} = d \frac{1}{2} y^2,$$

于是原方程的通解为

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2} y^2 + C.$$

**例 10.9** 解方程  $2xy' + \sin 2y = 2x \sin x \cos^2 y$ .

**解析** 原方程化为

$$\sec^2 y \cdot y' + \frac{1}{x} \tan y = \sin x,$$

令  $\tan y = u$ , 上式化为一阶线性方程

$$\frac{du}{dx} + \frac{1}{x}u = \sin x,$$

应用通解公式得

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left( C + \int \sin x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx \right) = \frac{1}{x} \left( C + \int x \sin x dx \right) \\ &= \frac{1}{x} (C + \sin x - x \cos x), \end{aligned}$$

于是原方程的通解为



$$\tan y = \frac{1}{x}(C + \sin x - x \cos x).$$

**例 10.10** 设  $f(x)$  具有二阶连续导数,  $f(0) = 0, f'(0) = 1$ , 且

$$[xy(x+y) - f(x)y]dx + [f'(x) + x^2y]dy = 0$$

为一全微分方程, 求  $f(x)$  及此全微分方程的通解.

**解析** 由全微分方程的充要条件  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  知

$$x^2 + 2xy - f(x) = f''(x) + 2xy,$$

即

$$f''(x) + f(x) = x^2.$$

解得

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 - 2,$$

由  $f(0) = 0, f'(0) = 1$  求得  $C_1 = 2, C_2 = 1$ , 从而得

$$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2.$$

于是原方程为

$$[xy^2 - (2\cos x + \sin x)y + 2y]dx + (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2y)dy = 0.$$

原函数为

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \int_0^x P(x, 0)dx + \int_0^y Q(x, y)dy \\ &= 0 + \int_0^y (-2\sin x + \cos x + 2x + x^2y)dy \\ &= (-2\sin x + \cos x + 2x)y + \frac{1}{2}x^2y^2, \end{aligned}$$

故所求通解为

$$(-2\sin x + \cos x + 2x)y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C.$$

**例 10.11** 求方程  $y'' + (y')^2 = 2e^{-y}$  满足条件  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  的特解.

**解析** 方程不显含自变量  $x$ , 令  $y' = u$ , 则  $y'' = u \frac{du}{dy}$ , 原方程化为

$$u \frac{du}{dy} + u^2 = 2e^{-y},$$

这是伯努利方程, 继令  $u^2 = v$ , 方程化为

$$\frac{dv}{dy} + 2v = 4e^{-y}.$$

应用一阶线性方程的通解公式得

$$v = e^{-2 \int dy} \left( C_1 + \int 4e^{-y} \cdot e^{2 \int dy} dy \right) = C_1 e^{-2y} + 4e^{-y},$$

由于  $y = 0$  时  $v = 1$ , 代入上式可解得  $C_1 = -3$ , 于是

$$\frac{dy}{dx} = u = \sqrt{v} = e^{-y} \sqrt{4e^y - 3},$$

分离变量积分得

$$\sqrt{4e^y - 3} = 2x + C_2,$$

由于  $x = 0$  时,  $y = 0$ , 代入上式得  $C_2 = 1$ , 于是所求特解为

$$4e^y = (1 + 2x)^2 + 3.$$

**例 10.12** 设二阶常系数线性方程

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0$$

有特解  $y = e^x \cos 2x$ , 求  $\alpha, \beta$ , 并写此方程的通解 (其中  $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ).

**解析** 由于实系数的特征方程

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$$

的复特征根成对共轭出现, 又已知有特解  $e^x \cos 2x$ , 所以  $\lambda = 1 \pm 2i$  为一对共轭复特征根, 故

$$\alpha = -((1 + 2i) + (1 - 2i)) = -2,$$

$$\beta = (1 + 2i)(1 - 2i) = 5,$$

原方程的通解为

$$y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$



**例 10.13** 求方程  $f'(x) = f(1-x)$  满足条件  $f(0) = 1$  的特解.

**解析** 由  $f'(x) = f(1-x)$  两边对  $x$  求导得

$$f''(x) = -f'(1-x) = -f(1-(1-x)) = -f(x),$$

于是必有  $f''(x) + f(x) = 0$ , 此方程的特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0$ , 特征根为  $\lambda = \pm i$ , 故此方程的通解为

$$f(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

由  $f(0) = 1$  代入可解得  $C_1 = 1$ . 在  $f'(x) = f(1-x)$  中令  $x = 1$  得  $f'(1) = 1$ , 由于

$$f'(x) = -\sin x + C_2 \cos x,$$

由此解出  $C_2 = \frac{1 + \sin 1}{\cos 1}$ , 于是所求方程的特解为

$$f(x) = \cos x + \frac{1 + \sin 1}{\cos 1} \sin x.$$

**例 10.14** 设线性无关的函数  $y_i(x) (i = 1, 2, 3)$  都是微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的解, 则其通解为( ).

- (A)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + y_3$
- (B)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (C_1 + C_2) y_3$
- (C)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 - (1 - C_1 - C_2) y_3$
- (D)  $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

**解析** 由于原方程的任意两个线性无关解的差是其对应的齐次方程的解, 于是  $y_1 - y_3, y_2 - y_3$  是对应的齐次方程的解, 令

$$k_1(y_1 - y_3) + k_2(y_2 - y_3) = 0,$$

整理得

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 - (k_1 + k_2) y_3 = 0,$$

由于  $y_1, y_2, y_3$  线性无关, 所以  $k_1 = k_2 = -(k_1 + k_2) = 0$ , 即得  $k_1 = k_2 = 0$ , 这表明  $y_1 - y_3$  与  $y_2 - y_3$  线性无关, 因而对应的齐次方程的

通解为

$$y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3).$$

原方程的通解为

$$y = C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_2 - y_3) + y_3.$$

故应选择(D). 其他解答皆错.

**例 10.15** 求微分方程  $y'' - 3y' + 2y = xe^x$  的通解.

**解析** 特征方程为  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , 特征根为  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ . 于是所给方程的余函数为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

下面求原方程的特解  $\tilde{y}(x)$ . 由于  $\lambda = 1$  是特征方程的单根, 故可设原方程的一个特解为

$$\tilde{y} = x(ax + b)e^x,$$

将其代入原方程得

$$-2ax + 2a - b = x,$$

比较系数解得  $a = -\frac{1}{2}$ ,  $b = -1$ , 所以

$$\tilde{y} = -\left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x,$$

从而所求通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - \left(\frac{x^2}{2} + x\right)e^x.$$

**例 10.16** 设  $y = y(x)$  满足微分方程  $y'' - 3y' + 2y = 2e^x$ , 且其图形在点  $(0, 1)$  处的切线与曲线  $y = x^2 - x + 1$  在该点的切线重合, 求函数  $y = y(x)$ .

**解析** 特征方程为  $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ , 特征根为  $\lambda = 1, 2$ , 故余函数为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

又原方程有特解

$$\tilde{y} = \frac{x}{(D^2 - 3D + 2)'|_{D=1}} 2e^x = -2xe^x,$$

故原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x.$$

由曲线过点 $(0, 1)$ , 及切线重合条件得  $y(0) = 1, y'(0) = -1$ , 代入通解, 可解出  $C_1 = 1, C_2 = 0$ , 于是所求函数为  $y = (1 - 2x)e^x$ .

**例 10.17** 求微分方程  $y'' + 2y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos^2 x$  的满足初值条件  $y(0) = 1, y'(0) = 0$  的特解.

**解析** 特征方程为  $\lambda^2 + 2\lambda = 0$ , 特征根为  $\lambda = 0, -2$ , 故余函数为

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x}.$$

原方程的非齐次项

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x) + \frac{1}{2}.$$

先求  $y'' + 2y' = \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x)$  的特解,

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1 &= \frac{1}{D^2 + 2D} \frac{1}{2} (\sin 2x + \cos 2x) \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{Re} \frac{1}{D^2 + 2D} e^{i2x} + \operatorname{Im} \frac{1}{D^2 + 2D} e^{i2x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \operatorname{Re} \frac{1}{(2i)^2 + 4i} e^{i2x} + \operatorname{Im} \frac{1}{(2i)^2 + 4i} e^{i2x} \right) \\ &= -\frac{1}{16} (\operatorname{Re}(1+i)(\cos 2x + i \sin 2x) + \\ &\quad \operatorname{Im}(1+i)(\cos 2x + i \sin 2x)) \\ &= -\frac{1}{8} \cos 2x, \end{aligned}$$

再求  $y'' + 2y' = \frac{1}{2}$  的特解. 令

$$\tilde{y}_2(x) = Ax,$$

则  $\tilde{y}_2'(x) = A, \tilde{y}_2''(x) = 0$ , 代入  $y'' + 2y' = \frac{1}{2}$  可解得  $A = \frac{1}{4}$ , 故

$\tilde{y}_2(x) = \frac{1}{4}x$ . 于是原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}x.$$

由于  $y(0) = 1$ , 得  $C_1 + C_2 - \frac{1}{8} = 1$ ; 因

$$y' = -2C_2 e^{-2x} + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4},$$

与  $y'(0) = 0$ , 得  $-2C_2 + \frac{1}{4} = 0$ , 所以  $C_2 = \frac{1}{8}, C_1 = 1$ , 于是所求的特解为

$$y = 1 + \frac{1}{8} e^{-2x} - \frac{1}{8} \cos 2x + \frac{1}{4}x.$$

**例 10.18** 对于微分方程

$$y'' - 2y' + \lambda y = e^x \sin 2x,$$

试就参数  $\lambda$  的不同值求出微分方程的一个特解  $\tilde{y}$ .

**解析** 特征方程为  $r^2 - 2r + \lambda = 0$ , 特征根为  $r = 1 \pm \sqrt{1 - \lambda}$ ,

1) 当  $\lambda = 5$  时,  $r = 1 \pm 2i$  为特征根, 此时

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{1}{D^2 - 2D + 5} e^x \sin 2x = \operatorname{Im} \frac{1}{D^2 - 2D + 5} \Big| e^{(1+2i)x} \\ &= \operatorname{Im} \frac{x}{(D^2 - 2D + 5)'} \Big|_{D=1+2i} e^{(1+2i)x} = \operatorname{Im} \frac{-1}{4} i x e^{(1+2i)x} \\ &= -\frac{1}{4} x e^x \cos 2x. \end{aligned}$$

2) 当  $\lambda \neq 5$  时,  $r = 1 \pm 2i$  不是特征根, 此时

$$\tilde{y} = \operatorname{Im} \frac{1}{D^2 - 2D + \lambda} \Big|_{D=1+2i} e^{(1+2i)x}$$

$$= \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda - 5} e^{(1+2i)x} = \frac{1}{\lambda - 5} e^x \sin 2x.$$

**例 10.19** 设二阶常系数线性方程

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$$

的一个特解为  $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ . 试确定常数  $\alpha, \beta, \gamma$ , 并求该方程的通解.

**解析** 由  $f(x) = \gamma e^x$  的形式与题给特解

$$y = e^{2x} + (1+x)e^x$$

形式的分析, 得知对应的齐次方程有基本解组  $y_1(x) = e^{2x}, y_2(x) = e^x$ , 于是对应的特征根为  $\lambda = 2, 1$ , 由此可得  $\alpha = -3, \beta = 2$ . 为求  $\gamma$ , 只需将特解  $\tilde{y} = xe^x$  代入  $y'' - 3y' + 2y$  得  $\gamma = -1$ , 从而原方程的通解为

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + xe^x.$$

**例 10.20** 已知二阶常系数线性方程

$$y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma(x+2)$$

有特解  $\tilde{y}(x) = e^x + 1 - x^2 - 6x$ , 求  $\alpha, \beta, \gamma$ , 并求该方程的通解.

**解析** 由于原方程的通解形式为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \tilde{y}_0(x),$$

这里  $y_1(x), y_2(x)$  是对应的齐次方程的基本解组,  $\tilde{y}_0(x)$  是原方程的一特解, 其形式为  $Ax + B$  或  $x(Ax + B)$ , 故有

$$\tilde{y}(x) = e^x + 1 - x(x+6) = C_1^0 y_1(x) + C_2^0 y_2(x) + \tilde{y}_0(x),$$

这里  $C_1^0$  与  $C_2^0$  是两个固定常数. 分析此式的两边可得

$$y_1(x) = e^x, \quad y_2(x) = 1, \quad \tilde{y}_0(x) = x(-x-6),$$

于是  $\lambda = 1, 0$  是特征根,  $\alpha = -(1+0) = -1, \beta = 1 \cdot 0 = 0$ , 将  $\tilde{y}_0(x) = x(-x-6) = -x^2 - 6x$  代入原方程可得

$$-2 - (-2x - 6) = \gamma(x+2),$$

所以  $\gamma = 2$ , 即  $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 2$ , 且原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 - x^2 - 6x.$$

**例 10.21** 解方程  $y'' + y' = \frac{1}{1+e^x}$ .

**解析** 方法 I 令  $y' = u$ , 则  $y'' = u'$ , 原方程化为

$$u' + u = \frac{1}{1 + e^x},$$

应用一阶线性方程求通解公式得

$$\begin{aligned} u &= e^{-\int dx} \left( C_1 + \int \frac{1}{1 + e^x} e^{\int dx} dx \right) = e^{-x} \left( C_1 + \int \frac{1}{1 + e^x} e^x dx \right) \\ &= e^{-x} (C_1 + \ln(1 + e^x)). \end{aligned}$$

于是

$$y' = C_1 e^{-x} + e^{-x} \ln(1 + e^x),$$

积分得

$$\begin{aligned} y &= C_1 \int e^{-x} dx + \int e^{-x} \ln(1 + e^x) dx + C_2 \\ &= -C_1 e^{-x} - \int \ln(1 + e^x) d(e^{-x}) + C_2 \\ &= -C_1 e^{-x} - e^{-x} \ln(1 + e^x) + \int \frac{e^{-x} e^x}{1 + e^x} dx + C_2 \\ &= -C_1 e^{-x} - e^{-x} \ln(1 + e^x) + x - \ln(1 + e^x) + C_2, \end{aligned}$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 + x - (e^{-x} + 1) \ln(1 + e^x).$$

**评注** 此例是二阶常系数线性方程, 但由于非齐次项  $f(x)$  不是多项式、指数函数、三角函数的类型, 故方法 I 将它视为特殊的二阶方程, 用降价法求解.

**方法 II** 应用常数变易法. 因特征方程为  $\lambda^2 + \lambda = 0$ , 特征根为  $\lambda = 0, -1$ , 故对应的齐次方程有基本解组  $y_1(x) = 1, y_2(x) = e^{-x}$ , 令  $y = C_1(x) + C_2(x)e^{-x}$ , 则有

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)e^{-x} = 0, \\ C_1'(x) \cdot 0 - C_2'(x)e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x}, \end{cases}$$

解得  $C_1'(x) = \frac{1}{1 + e^x}, C_2'(x) = \frac{-e^x}{1 + e^x}$ , 积分得



$$C_1(x) = C_1 + \int \frac{1+e^x - e^x}{1+e^x} dx = C_1 + x - \ln(1+e^x),$$

$$C_2(x) = C_2 - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = C_2 - \ln(1+e^x),$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x - (1+e^{-x}) \ln(1+e^x).$$

**例 10.22** 设函数  $y = y(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上具有二阶导数, 且  $y' \neq 0$ ,  $x = x(y)$  是  $y = y(x)$  的反函数.

(1) 试将  $x = x(y)$  所满足的微分方程

$$\frac{d^2 x}{dy^2} + (y + \sin x) \left( \frac{dx}{dy} \right)^3 = 0$$

变换为  $y = y(x)$  满足的微分方程;

(2) 求变换后的微分方程满足条件  $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$  的解.

**解析** (1) 由  $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'(x)}$ , 两边对  $y$  求导得

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{y'(x)} \right) \frac{dx}{dy} = - \frac{y''(x)}{(y'(x))^2} \cdot \frac{1}{y'(x)} = - \frac{y''(x)}{(y'(x))^3},$$

一起代入原微分方程并化简得

$$y''(x) - y(x) = \sin x. \quad (1)$$

(2) 特征方程为  $\lambda^2 - 1 = 0$ , 特征值为  $\lambda = \pm 1$ , 所以余函数为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

设方程(1)的特解为  $\tilde{y} = A \cos x + B \sin x$ , 代入(1)式求得  $A = 0$ ,

$B = -\frac{1}{2}$ , 故  $\tilde{y} = -\frac{1}{2} \sin x$ , 于是(1)的通解为

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

由  $y(0) = 0, y'(0) = \frac{3}{2}$ , 得  $C_1 = 1, C_2 = -1$ , 于是所求特解为

$$y(x) = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin x.$$

**例 10.23** 利用变换  $x = \ln t$ , 将方程

$$y'' + (e^x - 1)y' - 2e^{2x}y = e^{3x} \quad (1)$$

化为常系数线性方程, 并求原方程的通解.

**解析**  $x = \ln t$  时  $t = e^x$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} e^x,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} (e^x)^2 + \frac{dy}{dt} (e^x)' = \frac{d^2y}{dt^2} e^{2x} + \frac{dy}{dt} e^x,$$

代入原式并化简得

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = t. \quad (2)$$

此为二阶常系数线性方程, 特征方程为

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0,$$

解得  $\lambda = 1, -2$ , 故其余函数为  $y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t}$ . 令特解  $\tilde{y}(t) = At + B$ , 代入方程(2) 可解得  $A = -\frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}$ , 故有特解  $\tilde{y}(t) = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ , 于是方程(2) 的通解为

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

因此原方程的通解为

$$y = C_1 \exp(e^x) + C_2 \exp(-2e^x) - \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{4}.$$

**例 10.24** 求方程  $x^2 y'' + xy' + y = 2x$  满足初值条件  $y(1) = 1, y'(1) = 0$  的特解.

**解析** 这是欧拉方程. 令  $x = e^t, D = \frac{d}{dt}, D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$ , 则

$$xy' = Dy, \quad x^2 y'' = D(D-1)y,$$

代入原方程化简得  $(D^2 + 1)y = 2e^t$ , 特征方程为  $\lambda^2 + 1 = 0$ , 特征根为  $\lambda = \pm i$ , 所以余函数为



$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

下面求特解. 令  $\tilde{y}(t) = Ae^t$ , 代入方程得  $2Ae^t = 2e^t$ , 故  $A = 1$ ,  $\tilde{y}(x) = e^x$ . 于是通解为

$$y = C_1 \cos t + C_2 \sin t + e^t,$$

原方程的通解为

$$y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) + x.$$

由  $y(1) = 1$  代入得  $C_1 + 1 = 1$ , 故  $C_1 = 0$ ; 又由  $y'(1) = 0$  与

$$y' = C_2 \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} + 1,$$

得  $C_2 + 1 = 0$ , 故  $C_2 = -1$ , 于是所求特解为

$$y = -\sin(\ln x) + x.$$

**例 10.25** 具有特解  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = 2xe^{-x}$ ,  $y_3 = 3e^x$  的 3 阶常数齐次线性微分方程是( ).

- (A)  $y''' - y'' - y' + y = 0$  (B)  $y''' + y'' - y' - y = 0$   
 (C)  $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$  (D)  $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$

**解析** 因  $y_1 = e^{-x}$ ,  $y_2 = 2xe^{-x}$  是特解, 故  $\lambda = -1$  是其对应的特征方程的二重根; 因  $y_3 = 3e^x$  是特解, 故  $\lambda = 1$  是特征方程的单根, 于是特征方程为

$$(\lambda + 1)^2(\lambda - 1) = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

所以所求的线性常系数齐次方程为

$$y''' + y'' - y' - y = 0,$$

即(B) 成立.

**例 10.26** 求作一个阶数最低的常系数线性非齐次方程, 使它以  $e^x$  为一特解, 而对应的齐次方程有特解  $x, e^{-x}, x \sin x$ , 并写出该方程的通解.

**解析** 因为对应的齐次方程有特解  $x, e^{-x}, x \sin x$ , 这表明其特征方程有特征根

$$\lambda = 0, 0, -1, \pm i, \pm i,$$

因此特征方程为  $\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2=0$ , 展开得

$$\lambda^7 + \lambda^6 + 2\lambda^5 + 2\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0,$$

故对应的阶数最低的常系数线性非齐次方程为

$$y^{(7)} + y^{(6)} + 2y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} + y^{(2)} = f(x),$$

将特解  $e^x$  代入得  $f(x) = 8e^x$ , 且所求方程的通解为

$$y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + (C_4 + C_5x)\cos x + (C_6 + C_7x)\sin x + e^x.$$

**例 10.27** 解方程组  $\begin{cases} x' = -2y + e^t, \\ y' = x + 2y + e^{-t}. \end{cases}$

**解析** 第一式两边求导得  $x'' = -2y' + e^t$ , 应用原方程组化简得

$$x'' - 2x' + 2x = -e^t - 2e^{-t}. \quad (1)$$

特征方程为  $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ , 特征根为  $\lambda = 1 \pm i$ , 于是余函数为

$$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t).$$

次求原方程(1)的特解.

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{1}{D^2 - 2D + 2}(-e^t - 2e^{-t}) \\ &= \frac{-1}{1^2 - 2 + 2}e^t - \frac{2}{(-1)^2 + 2 + 2}e^{-t} \\ &= -e^t - \frac{2}{5}e^{-t}. \end{aligned}$$

于是方程(1)的通解为

$$x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - e^t - \frac{2}{5}e^{-t}.$$

由于  $y = \frac{1}{2}(e^t - x')$ , 所以

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^t((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t) + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{5}e^{-t} \\ &= -e^t\left(\frac{C_1 + C_2}{2}\cos t + \frac{C_2 - C_1}{2}\sin t\right) + e^t - \frac{1}{5}e^{-t}. \end{aligned}$$

于是原方程组的通解为

$$\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos t + C_2 \sin t) - e^t - \frac{2}{5}e^{-t}, \\ y = -\frac{1}{2}e^t((C_1 + C_2)\cos t + (C_2 - C_1)\sin t) + e^t - \frac{1}{5}e^{-t}. \end{cases}$$

**例 10.28** 设函数  $f(x)$  可导, 对任意的  $x, y$  有  $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ , 且  $f(0) = 1, f'(0) = 2$ , 试求函数  $f(x)$  满足的微分方程, 并求  $f(x)$ .

**解析** 应用导数的定义有

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x)(f(y) - 1)}{y} \\ &= f(x) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} = f(x)f'(0) = 2f(x), \end{aligned}$$

于是  $f(x)$  满足的微分方程为  $\frac{dy}{dx} = 2y, y(0) = 1$ , 分离变量积分得  $y = Ce^{2x}$ , 由  $y(0) = 1$  代入得  $y = e^{2x}$ , 故所求函数为  $f(x) = e^{2x}$ .

**例 10.29** 设函数  $f(x)$  可导,  $f'(0) = 1$ , 满足关系式

$$f(x+y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)},$$

试求函数  $f(x)$  满足的微分方程, 并求函数  $f(x)$ .

**解析** 在原式中令  $y = 0$  得

$$f(x) - f^2(x)f(0) = f(x) + f(0),$$

由此解得  $f(0) = 0$  或  $f(x) = 0$ . 由于  $f(x) = 0$  时  $f'(0) = 0$  不合题意, 所以  $f(0) = 0$ . 原式化为

$$\begin{aligned} & f(x+y) - f(x+y)f(x)f(y) = f(x) + f(y), \\ \Rightarrow & \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \frac{f(y) - f(0)}{y} (f(x)f(x+y) + 1), \\ \Rightarrow & \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(0)}{y} (f(x)f(x+y) + 1), \\ \Rightarrow & f'(x) = f'(0)(f^2(x) + 1) = 1 + f^2(x), \end{aligned}$$

于是函数  $f(x)$  满足的微分方程为

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0,$$

这是变量可分离的方程, 显然通解为

$$\arctan y = x + C$$

由  $y(0) = 0$  得  $C = 0$ , 所以所求函数为

$$f(x) = \tan x.$$

**例 10.30** 设对于曲线  $L$  上任一点  $P(x, y)$  恒有  $OP \perp QR$  (如图 10.1), 其中  $PR$  为  $L$  在点  $P$  的切线,  $PQ$  垂直于  $x$  轴, 又  $L$  通过点  $(1, 2)$ , 求  $L$  的方程.

**解析** 设曲线方程为  $y = y(x)$ , 则切线  $PR$  的方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

因而点  $R$  的坐标为  $(0, y - xy')$ , 直线  $QR$  的

斜率为  $k_1 = \frac{xy' - y}{x}$ ,  $OP$  的斜率为  $k_2 = \frac{y}{x}$ ,

因  $QR \perp OP$ , 故

$$\frac{xy' - y}{x} = -\frac{x}{y},$$

化简得微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy},$$

令  $y = xu$ , 方程化为

$$u du = -\frac{dx}{x},$$

积分得

$$u^2 = C - 2 \ln |x|$$

由于  $x = 1$  时  $y = 2, u = 2$ , 代入上式得  $C = 4$ , 于是所求曲线方程为

$$y^2 = x^2(4 - \ln x^2).$$

**例 10.31** 连结两点  $A(0, 1), B(1, 0)$  的一条曲线, 它位于弦  $AB$  的上方,  $P(x, y)$  为曲线上任一点, 已知曲线与弦  $AP$  之间的面积

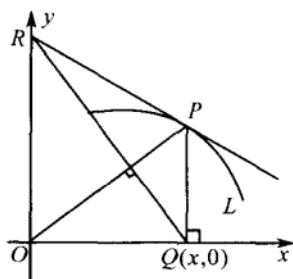


图 10.1

为  $x^3$ , 求曲线的方程.

**解析** 由于  $x^3$  严格增, 所以对曲线上任一点  $P$ , 曲线  $\widehat{AP}$  位于弦  $AP$  上方. 作  $PC \perp x$  轴 (如图 10.2), 则梯形  $OCPA$  的面积为  $\frac{1}{2}x(1+y)$ , 曲线与弦  $AP$  之间的面积为

$$\int_0^x y dx - \frac{1}{2}x(1+y) = x^3,$$

两边对  $x$  求导得

$$y' - \frac{1}{x}y = -6x - \frac{1}{x},$$

此方程的通解为

$$\begin{aligned} y &= e^{\int \frac{1}{x} dx} \left( C - \int \left( 6x + \frac{1}{x} \right) e^{-\int \frac{1}{x} dx} dx \right) \\ &= x \left( C - \int \left( 6 + \frac{1}{x^2} \right) dx \right) = Cx - 6x^2 + 1, \end{aligned}$$

由于  $y(0) = 1, y(1) = 0$ , 由此可定出  $C = 5$ , 故所求曲线为

$$y = 5x - 6x^2 + 1.$$

**例 10.32** 在  $xy$  平面的第一象限求一曲线, 使由其上任一点  $P$  处的切线,  $x$  轴, 与线段  $OP$  所围三角形的面积为常数  $k$ , 且曲线通过点  $(1, 1)$ .

**解析** 设点  $P$  的坐标为  $(x, y)$ , 曲线方程为  $y = y(x)$ , 该曲线在点  $P$  的切线方程为

$$Y - y = y'(X - x),$$

它与  $x$  轴交点  $Q$  的坐标为  $\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$ , 三角形  $\triangle OPQ$  的面积为

$$\frac{1}{2} \left( x - \frac{y}{y'} \right) y = k,$$

此方程可化为关于  $x$  的一阶线性方程

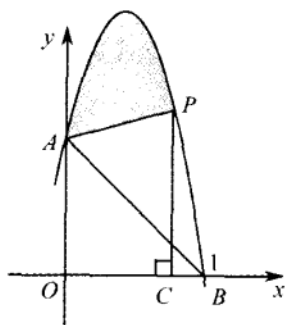


图 10.2

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = -\frac{2k}{y^2},$$

应用通解公式即得

$$\begin{aligned} x &= e^{\int \frac{1}{y} dy} \left( C - 2k \int \frac{1}{y^2} e^{-\int \frac{1}{y} dy} dy \right) \\ &= y \left( C - 2k \int \frac{1}{y^3} dy \right) = Cy + \frac{k}{y}, \end{aligned}$$

由初值条件  $y(1) = 1$ , 可定出  $C = 1 - k$ , 于是所求曲线为

$$xy = (1 - k)y^2 + k.$$

**例 10.33** 在第一象限内求一下凸的曲线, 使其上任一点的曲率半径等于过这一点的法线介于该点与横轴间线段长的两倍.

**解析** 在曲线  $y = f(x)$  上点  $(x, y)$  处的法线方程为

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x).$$

令  $Y = 0$  得  $X_0 = x + yy'$ , 于是与  $x$  轴交点的坐标为  $(x + yy', 0)$ , 它与点  $(x, y)$  的距离为  $\sqrt{y^2 + y^2 y'^2}$ , 设曲率半径为  $R$ , 由题意得

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} = 2 \sqrt{y^2 + y^2 y'^2},$$

化简得

$$2yy'' = 1 + y'^2,$$

令  $y' = u$ , 则  $y'' = u \frac{du}{dy}$ , 代入上式得

$$\frac{2u du}{1 + u^2} = \frac{dy}{y},$$

积分得

$$\ln(1 + u^2) = \ln|y| + \ln|C_1|,$$

故有  $u = \pm \sqrt{C_1 y - 1}$ , 即

$$\frac{dy}{\sqrt{C_1 y - 1}} = \pm dx,$$



积分得所求曲线的方程为

$$4(C_1y - 1) = C_1^2(x + C_2)^2.$$

**例 10.34** 设曲线  $y = f(x)$  过坐标原点和点  $(1, 2)$ , 单调增, 且  $f(x)$  连续可导. 在该曲线上任取点作坐标轴的平行线. 若其中一条平行线与  $x$  轴及曲线所围图形的面积等于另一条平行线与  $y$  轴及曲线所围图形的面积的 3 倍, 求曲线  $y = f(x)$ .

**解析** 设曲线上任取一点的坐标为  $(x, y)$ . 由题意得

$$\int_0^x f(x) dx = 3 \int_0^{f(x)} f^{-1}(y) dy,$$

这里  $x = f^{-1}(y)$  是  $y = f(x)$  的反函数. 上式两边对  $x$  求导得

$$f(x) = 3f'(x) \cdot f^{-1}(f(x)) = 3xf'(x). \quad (1)$$

分离变量得

$$\frac{3df(x)}{f(x)} = \frac{dx}{x},$$

积分得

$$f(x) = \sqrt[3]{Cx},$$

由于  $f(0) = 0, f(1) = 2$ , 代入上式得  $C = 8$ , 故所求曲线为

$$y = f(x) = 2 \cdot \sqrt[3]{x}.$$

**评注** 方程(1)也可由下法得到. 以原点与点  $(x, y)$  为对角线顶点的矩形的面积为  $xy$ , 由题意得

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{3}{4}xf(x),$$

两边对  $x$  求导得

$$f(x) = \frac{3}{4}(f(x) + xf'(x)),$$

化简即得

$$3xf'(x) = f(x).$$

**例 10.35** 函数  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上可导,  $f(0) = 1$ , 且满足等式

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0,$$

(1) 求导数  $f'(x)$ ;

(2) 证明: 当  $x \geq 0$  时, 成立不等式:  $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ .

解析 (1) 由题设知

$$(x+1)f'(x) + (x+1)f(x) - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

上式两边对  $x$  求导, 得  $f(x)$  满足的微分方程

$$(x+1)f''(x) = -(x+2)f'(x).$$

用降阶法, 令  $u = f'(x)$ , 则有可分离变量的方程

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x+2}{x+1}u.$$

解之得

$$f'(x) = u = \frac{Ce^{-x}}{x+1}.$$

由  $f(0) = 1$  及  $f'(0) + f(0) = 0$ , 知  $f'(0) = -1$ , 从而  $C = -1$ , 因此

$$f'(x) = -\frac{e^{-x}}{x+1}.$$

下面用两种方法证明(2).

方法 I 当  $x \geq 0$  时,  $f'(x) < 0$ , 即  $f(x)$  单调减少, 又  $f(0) = 1$ , 所以

$$f(x) \leq f(0) = 1.$$

设  $\varphi(x) = f(x) - e^{-x}$ , 则  $\varphi(0) = 0$ ,

$$\varphi'(x) = f'(x) + e^{-x} = \frac{x}{x+1}e^{-x}.$$

当  $x \geq 0$  时,  $\varphi'(x) \geq 0$ , 即  $\varphi(x)$  单调增加, 因而

$$\varphi(x) \geq \varphi(0) = 0, \text{ 即有 } f(x) \geq e^{-x}.$$

综上所述, 当  $x \geq 0$  时, 成立不等式  $e^{-x} \leq f(x) \leq 1$ .

方法 II 由于



$$\int_0^x f'(t) dt = f(x) - f(0) = f(x) - 1,$$

所以

$$f(x) = 1 - \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt.$$

注意到当  $x \geq 0$  时,

$$0 \leq \int_0^x \frac{e^{-t}}{t+1} dt \leq \int_0^x e^{-t} dt = 1 - e^{-x},$$

因而

$$e^{-x} \leq f(x) \leq 1.$$

**例 10.36** 求满足方程

$$\int_0^x f(t) dt = x + \int_0^x t f(x-t) dt$$

的可微函数  $f(x)$ .

**解析** 对右端的积分, 令  $x-t=u$ , 则上式化为

$$\int_0^x f(t) dt = x + \int_0^x (x-u) f(u) du,$$

两边对  $x$  求导得

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(u) du,$$

且  $f(0) = 1$ , 上式对  $x$  求导得  $f'(x) = f(x)$ , 由此可解得  $f(x) = Ce^x$ , 且由  $f(0) = 1$  可知  $C = 1$ , 所以所求函数为  $f(x) = e^x$ .

**例 10.37** 设函数  $f(x)$  二阶连续可导,  $f(0) = 0, f'(0) = 2$ , 且使曲线积分

$$\int_{\Gamma} y f(x) dx + (f'(x) - x^3) dy$$

与路线无关, 求函数  $f(x)$ .

**解析** 记  $P(x, y) = y f(x), Q(x, y) = f'(x) - x^3$ , 因曲线积分与路线无关, 其充要条件是  $Q'_x = P'_y$ , 即得

$$f''(x) - f(x) = 3x^2. \quad (1)$$

特征方程为  $\lambda^2 - 1 = 0$ , 特征根为  $\lambda = \pm 1$ , 所以余函数为

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

次求方程(1)的特解.

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \frac{1}{D^2 - 1} 3x^2 = 3(-1 - D^2)x^2 \\ &= -3x^2 - 6.\end{aligned}$$

因此方程(1)的通解为

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 3x^2 - 6.$$

由于  $f(0) = 0, f'(0) = 2$ ; 故有  $C_1 + C_2 = 6, C_1 - C_2 = 2$ , 解得  $C_1 = 4, C_2 = 2$ , 于是所求的函数为

$$f(x) = 4e^x + 2e^{-x} - 3x^2 - 6.$$

**例 10.38** 设对于半空间  $x > 0$  内任意的光滑有向封闭曲面  $S$ , 都有

$$\oiint_S x f(x) dy dz - xy f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy = 0,$$

其中函数  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  内具有连续的一阶导数, 且  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) =$

1. 求  $f(x)$ .

**解析** 由题设和高斯公式得

$$\begin{aligned}0 &= \oiint_S x f(x) dy dz - xy f(x) dz dx - e^{2x} z dx dy \\ &= \pm \iiint_V (x f'(x) + f(x) - x f(x) - e^{2x}) dv,\end{aligned}$$

其中  $V$  为  $S$  围成的有界闭区域, 当有向曲面  $S$  的法向量指向外侧时, 取“+”号, 当有向曲面  $S$  的法向量指向内侧时, 取“-”号. 由  $S$  的任意性, 知

$$x f'(x) + f(x) - x f(x) - e^{2x} = 0, \quad x > 0,$$

即

$$f'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x}, \quad x > 0,$$

按一阶线性非齐次方程通解公式,有

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\int(1-\frac{1}{x})dx} \left[ \int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot e^{\int(\frac{1}{x}-1)dx} dx + C \right] \\ &= \frac{e^x}{x} \left[ \int \frac{1}{x} e^{2x} \cdot x e^{-x} dx + C \right] = \frac{e^x}{x} (e^x + C). \end{aligned}$$

由于  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left[ \frac{e^{2x} + C e^x}{x} \right] = 1$ , 故必有  $\lim_{x \rightarrow 0+} (e^{2x} + C e^x) = 0$ , 即  $C + 1 = 0$ , 从而  $C = -1$ . 于是

$$f(x) = \frac{e^x}{x} (e^x - 1).$$

**例 10.39** 某湖泊的水量为  $V$ , 每年排入湖泊内含污染物  $A$  的污水量为  $\frac{V}{6}$ , 流入湖泊内不含  $A$  的水量为  $\frac{V}{6}$ , 流出湖泊的水量为  $\frac{V}{3}$ . 已知 1999 年底湖中  $A$  的含量为  $5m_0$ , 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2000 年初起, 限定排入湖泊中含  $A$  污水的浓度不超过  $\frac{m_0}{V}$ . 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物  $A$  的含量降至  $m_0$  以内? (注: 设湖水中  $A$  的浓度是均匀的)

**解析** 这是微分方程的应用题, 通过建立微分方程, 并求其特解来解此题. 从 2000 年初 (令此时  $t = 0$ ) 开始, 设时刻  $t$  (单位年) 时湖泊中污染物  $A$  的总量为  $m$ , 浓度为  $\frac{m}{V}$ , 则在时间间隔  $[t, t + dt]$  内, 排入湖泊中  $A$  的量为

$$\frac{m_0}{V} \cdot \frac{V}{6} dt = \frac{m_0}{6} dt,$$

流出湖泊的水中  $A$  的量为

$$\frac{m}{V} \cdot \frac{V}{3} dt = \frac{m}{3} dt,$$

因而在此时间间隔内湖泊中污染物  $A$  的改变量

$$dm = \left( \frac{m_0}{6} - \frac{m}{3} \right) dt.$$



由分离变量法解得

$$m = \frac{m_0}{2} - Ce^{-\frac{t}{3}},$$

代入初始条件  $m \Big|_{t=0} = 5m_0$ , 得  $C = -\frac{9}{2}m_0$ , 于是

$$m = \frac{m_0}{2}(1 + 9e^{-\frac{t}{3}}),$$

令  $m = m_0$ , 得

$$t = 6\ln 3,$$

即至多需经过  $6\ln 3$  年(约 7 年), 湖泊中污染物 A 的含量降至  $m_0$  以内.

**评注** 本题题目的最后在括号中注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的. 因此污染物的含量  $m$  应是变量  $t$  的连续函数. 若没有上述“注”, 则可用下列解法:

设第  $n$  年末污染物 A 的含量为  $x_n$ , 则  $x_0 = 5m_0$ ,

$$x_{n+1} = \frac{3}{4}\left(x_n + \frac{m_0}{V} \frac{V}{6}\right) = 0.75x_n + 0.125m_0,$$

于是可逐年计算出  $x_1 = 3.875m_0, x_2 = 3.031m_0, x_3 = 2.398m_0, x_4 = 1.924m_0, x_5 = 1.568m_0, x_6 = 1.301m_0, x_7 = 1.101m_0, x_8 = 0.951m_0$ , 所以第 8 年末污染物的含量可达标, 降至  $m_0$  以内.

**例 10.40** 从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确定仪器的下沉深度  $x$  (从海平面算起) 与下沉速度  $v$  之间的函数关系. 设仪器在重力的作用下, 从海平面由静止开始铅直下沉, 在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用. 设仪器的质量为  $m$ , 体积为  $B$ , 海水比重为  $\rho$ , 仪器所受的阻力与下沉速度成正比, 比例系数为  $k$  ( $k > 0$ ). 试建立  $x$  与  $v$  所满足的微分方程, 并求出函数关系式  $x = x(v)$ .

**解析** 这是微分方程的应用题. 首先建立坐标系, 求出下沉深度  $x$  所满足的微分方程.

取沉放点为原点  $O$ ,  $Ox$  轴正向铅直向下, 仪器的重力为  $mg$ , 浮

力为  $-B\rho$ , 阻力为  $-kv = -k \frac{dx}{dt}$ , 则由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg - B\rho - kv.$$

用降价法, 令  $\frac{dx}{dt} = v$ , 则  $\frac{d^2 x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx}$ , 代入上式得  $v$  与  $x$  之间的微分方程:

$$mv \frac{dv}{dx} = mg - B\rho - kv,$$

分离变量得

$$dx = \frac{mv}{mg - B\rho - kv} dv,$$

积分得

$$x = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho - kv) + C,$$

由初始条件  $v \Big|_{x=0} = 0$  定出

$$C = \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho),$$

故所求的函数关系式为

$$x = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln \frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho}.$$

**例 10.41** 质量为  $m$  的炮弹以初速  $v_0$  自地面垂直向上发射, 设空气阻力始终与炮弹的速度平方成正比, 比例系数为  $k$ , 重力加速度  $g$  为已知, 求炮弹的最高射程和所需的时间.

**解析** 建立坐标系,  $x$  轴铅直向上, 地面为原点, 炮弹在到达最高点之前满足下列初值问题:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg - k \left( \frac{dx}{dt} \right)^2, \\ x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0. \end{cases}$$

令  $\frac{dx}{dt} = v$ , 方程化为  $m \frac{dv}{dt} = -mg - kv^2$ , 分离变量积分得

$$\sqrt{\frac{m}{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v\right) = C_1 - t,$$

由  $v(0) = v_0$  可确定  $C_1 = \sqrt{\frac{m}{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v_0\right)$ . 炮弹到达最高点时  $v = 0$ , 因此炮弹到达最高点所需时间为

$$T = C_1 = \sqrt{\frac{m}{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v_0\right).$$

再由

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tan\left[\sqrt{\frac{kg}{m}} (C_1 - t)\right]$$

积分得

$$x = \frac{m}{k} \ln \cos\left[\sqrt{\frac{kg}{m}} (C_1 - t)\right] + C_2,$$

由  $x(0) = 0$ , 可确定  $C_2 = -\frac{m}{k} \ln \cos\left(\sqrt{\frac{kg}{m}} C_1\right)$ , 再令  $t = T$  可得炮弹到达最高点的高度为

$$h = C_2 = -\frac{m}{k} \ln \cos\left[\arctan\left(\sqrt{\frac{k}{mg}} v_0\right)\right] = \frac{m}{2k} \ln\left(1 + \frac{k}{mg} v_0^2\right).$$

**例 10.42** 一子弹以速度  $v_0 = 200\text{m/s}$  打进一厚度为  $10\text{cm}$  的板, 然后穿透它, 以速度  $v_1 = 80\text{m/s}$  离开板, 设板对子弹的阻力与运动速度的平方成正比, 求子弹穿透板所需的时间.

**解析** **方法 I** 设  $x(t)$  为运动规律, 则  $t = 0$  时  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = v_0 = 200$ . 设子弹穿透板所需时间为  $t_1$ , 则  $t = t_1$  时  $x'(t_1) = 80$ ,  $x(t_1) = 0.1$ . 据牛顿第二定律得

$$mx'' = -k(x')^2, \quad (1)$$

这里  $m$  为子弹的质量,  $k$  为常数. 令  $x' = v$ , 则  $x'' = v'$ , 上列方程化为

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2,$$

分离变量积分得

$$\frac{1}{v} = \frac{k}{m}t + C_1,$$

由  $t = 0$  时  $v = v_0 = 200$  代入上式得  $C_1 = \frac{1}{200}$ , 于是

$$\frac{dt}{dx} - \frac{k}{m}t = \frac{1}{200}. \quad (2)$$

应用一阶线性方程求通解的公式得

$$t = e^{\frac{k}{m}x} \left( C_2 + \int \frac{1}{200} e^{-\frac{k}{m}x} dx \right) = C_2 e^{\frac{k}{m}x} - \frac{1}{200} \frac{m}{k}.$$

由于  $t = 0$  时  $x = 0$  代入上式得  $C_2 = \frac{1}{200} \frac{m}{k}$ , 于是有

$$t = \frac{m}{200k} (e^{\frac{k}{m}x} - 1).$$

由于  $t = t_1$  时  $x = 0.1$  代入上式得

$$t_1 = \frac{m}{200k} (e^{0.1 \frac{k}{m}} - 1). \quad (3)$$

又在(2)式中令  $t = t_1$ , 此时  $v = v_1 = 80$ , 得

$$\frac{k}{m}t_1 = \frac{1}{80} - \frac{1}{200} = \frac{3}{400}, \quad (4)$$

由(3)、(4)两式消去  $\frac{k}{m}$ , 得所求子弹穿过板所需时间  $t_1$  为

$$t_1 = \frac{3}{4000} \left( \ln \frac{5}{2} \right)^{-1} \approx 0.00082(\text{s}).$$

**方法 II** 假设同方法 I, 并导出方程(1):

$$mx'' = -k(x')^2.$$

令  $x' = v$ , 则  $x'' = v \frac{dv}{dx}$ , 代入上式得

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m} dx,$$

积分得  $v = C_1 e^{-\frac{k}{m}x}$ , 由于  $x = 0$  时  $v = v_0 = 200$ ,  $x = 0.1$  时  $v = v_1 = 80$ , 由此可得  $C_1 = 200$ ,  $\frac{k}{m} = 10 \ln 2.5$ , 于是

$$\frac{dx}{dt} = v = 200e^{-10(\ln 2.5)x},$$

分离变量积分得

$$\frac{1}{10 \ln 2.5} e^{10(\ln 2.5)x} = 200t + C_2,$$

由于  $t = 0$  时  $x = 0$ , 代入上式得  $C_2 = \frac{1}{10 \ln 2.5}$ , 于是

$$t = \frac{1}{2000 \ln 2.5} (e^{10(\ln 2.5)x} - 1),$$

令  $x = 0.1$  即得子弹穿过板所需的时间为

$$t_1 = \frac{3}{4000 \ln 2.5} \approx 0.00082(\text{s}).$$





## 阶段复习试题五

1. 判别下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\ln(1+n)};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$$

$$(4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n - \ln n};$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n};$$

$$(6) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\left(n - \frac{1}{n}\right)^n};$$

$$(7) \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+2^n) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right); \quad (8) \sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right)^n \sin \frac{1}{3^n}.$$

2. 讨论下列级数的敛散性:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+q^n} \quad (q > 0); \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^p};$$

$$(3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \ln n} \quad (p \text{ 为参数}); \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n \quad (a > 0).$$

3. 求下列幂级数的收敛域:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+n)}{n} x^{n-1}; \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-3^{2n}} (x-1)^{2n+1};$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3n+1} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2n}; \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} n 4^n x^n (1-x)^n.$$

4. 求下列幂级数的收敛域与和函数:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^n} x^{2n}; \quad (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n;$$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}; \quad (4) \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)(x-1)^n;$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n;$$

$$(6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n-1)} x^{2n}.$$

5. 求下列级数的和:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n};$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n!}{2^n(n-1)!}.$$

6. 将下列函数展为  $x$  的幂级数, 并求收敛域:

$$(1) \ln(3+2x-x^2);$$

$$(2) \ln(1+x-x^2-x^3);$$

$$(3) \ln \frac{1+x}{2-x};$$

$$(4) \frac{1}{x^2-x-2};$$

$$(5) \frac{1}{(1+x)^2};$$

$$(6) x \arctan x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

7. 若  $|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| \leq k$ , 对任意自然数  $n$  成立,  $k$  为常数, 证明数列  $\{x_n\}$  收敛.

8. 设  $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$ , 已知  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  的收敛半径为  $R$ , 求证  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径也是  $R$ .

9. 设数列  $\{a_n\}$  为有界数列且不以零为极限, 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  的收敛域.

10. 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$  的收敛域为  $(-1, 1)$ , 求幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n} x^n$  的收敛半径.

11. 求下列一阶方程的通解:

$$(1) y' = \frac{xy}{x^2 - y^2};$$

$$(2) x \sin \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \sin \frac{y}{x} + x;$$

$$(3) 2xydx + (y^2 - 3x^2)dy = 0; \quad (4) y' + y \tan x = \sec x;$$

$$(5) xy' + y = x^4 y^3;$$

$$(6) ydx - (2x + y^4)dy = 0;$$

$$(7) y' = \frac{y}{x - x^2 y};$$

$$(8) (e^x + 3y^2)dx + 2xydy = 0;$$

$$(9) xy'^2 - 2yy' + 4x = 0; \quad (10) y' = \sin^2(x - y + 1).$$

12. 求下列二阶方程的通解:

$$(1) y'' + (y')^2 = 0; \quad (2) x^2 y'' - 2xy' = (y')^2;$$

$$(3) yy'' = y^2 y' + (y')^2.$$

13. 求下列线性方程的通解:

$$(1) y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}; \quad (2) y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x;$$

$$(3) y'' + y = xe^x \cos x; \quad (4) y'' - 2y' - 3y = 2e^x - 10 \sin x;$$

$$(5) y''' + y'' = 1 + x^2 + e^x \sin x; \quad (6) y'' + 4y = \sin 2x + x \sin^2 x;$$

$$(7) y''' + y'' - y' - y = \sin^2 x.$$

14. 设  $k$  为实常数, 试求  $y'' - 2ky' + k^2 y = e^x$  的通解.

15. 设  $\frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2} dx + \frac{1 + Ax}{y^3} dy = 0$  为全微分方程, 求常数  $A$ , 并求该方程的通解.

16. 设  $y_1 = \sqrt{x}, y_2 = \sqrt{x^3}$  是  $4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 0$  的两个解, 求方程

$$4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 3x^2$$

的通解.

17. 设  $a, b, c$  是正常数, 试证:

(1) 方程  $ay'' + by' + cy = 0$  的每一特解  $y(x)$  都有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$ ;

(2) 设  $f(x)$  为连续函数, 则方程  $ay'' + by' + cy = f(x)$  的两个特解  $\tilde{y}_1(x), \tilde{y}_2(x)$  的差都有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tilde{y}_1(x) - \tilde{y}_2(x)) = 0.$$

18. 已知二阶常系数线性方程  $y'' + ay' + by = f(x)$  有 3 个特解  $\tilde{y}_1(x) = e^{2x} + e^{-x}, \tilde{y}_2(x) = -e^x + e^{-x}, \tilde{y}_3(x) = e^{2x} + e^x + e^{-x}$ , 求  $a, b, f(x)$ , 并求通解.

19. 求作一个阶数最低的常系数线性非齐次方程, 使它有特解  $x^2$ , 而对应的齐次方程有特解  $1, \cos x, e^x \cos x$ , 并写出此方程的

通解.

20. 求作一个阶数最低的常系数线性非齐次方程,使它有特解  $e^x$ ,而对应的齐次方程有特解  $x, e^{-x}, x \cos x$ ,并写出此方程的通解.

21. 求  $y'' - 5y' + 6y = \begin{cases} e^{2x}, & x < 0, \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}$  的通解.

22. 求  $x^2 y'' + y = x^2$  ( $x > 0$ ) 的通解.

23. 求微分方程组  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y, \\ \frac{dy}{dt} = x + \sin t \end{cases}$  的通解.

24. 求微分方程组  $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y - 5e^t \sin t \end{cases}$  的通解.

25. 求一曲线,使其上任一点的切线夹于两坐标轴间的线段被切点所平分.

26. 在第一象限内求一曲线,使其通过点  $(4, 1)$ . 设曲线上任一点  $M$  的切线与  $x$  轴交于点  $A$ ,又过  $M$  作与坐标轴平行的直线分别交  $x$  轴与  $y$  轴于点  $B, C$ ,则三角形  $MBA$  与矩形  $OBMC$  的面积相等.

27. 设  $f(x)$  具有连续导数,满足

$$f(x) = -1 + x + 2 \int_0^x t f(x-t) f'(x-t) dt,$$

求  $f(x)$ .

28. 设  $f(x)$  是以  $2\pi$  为周期的连续函数,且  $\int_0^{2\pi} f(x) dx = k$ ,

(1) 求方程  $y' + y \cos x = f(x) e^{-\sin x}$  的通解;

(2) 上述方程的特解中有无周期为  $2\pi$  的解,为什么?

29. 设  $f(x)$  具有二阶连续的导数,  $f'(0) = 0$ ,且满足

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3} \int_0^x (6te^{-t} - 2f(t) - f''(t)) dt,$$

求  $f(x)$ .

30. 设  $f(x)$  具有二阶连续导数, 满足

$$f(x+y) + f(x-y) = f(x)f(y),$$

求  $f(x)$ .



## 阶段复习试题答案与提示

### 试题一

1. (1)  $\varphi(x) = \ln(1-x^2)$ ,  $-1 < x < 1$ ; (2)  $-\frac{2}{3}\left(2x + \frac{1}{x}\right)$ ; (3)  $x^2 + 2x$ . 2.  $a = -1, b \in \mathbf{R}$ , 或  $a = 1, b = 0$ . 3.  $x, -\infty < x < +\infty$ .
4.  $\begin{cases} 1+x, 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, 1 < x \leq 2. \end{cases}$  5. 17. 6. (1)  $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ; (2) 0; (3) 0; (4)  $\frac{1}{2}$ ; (5) 0; (6)  $-1$ ; (7)  $-6$ ; (8) 0; (9)  $\frac{7}{6}$ ; (10)  $\frac{1}{e}$ ; (11) 1; (12)  $\exp\left(-\frac{\pi^2}{2}\right)$ ; (13)  $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ ; (14)  $e$ ; (15)  $-50$ ; (16)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (17) 1; (18)  $-\frac{1}{4}$ . 8.  $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ .
9.  $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ . 11. 连续, 不可导. 12. 连续,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续. 13. 连续,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(x)$  在  $x = 0$  连续. 14.  $x \neq \pm 1$  时连续,  $x = \pm 1$  为跳跃型间断点. 15. 定义域为  $(-\infty, +\infty)$ ,  $x \neq \pm 1$  时连续,  $x = \pm 1$  为跳跃型间断点. 16.  $(-1, +\infty)$ ,  $x \neq 1$  时连续,  $x = 1$  为跳跃型间断点.
17.  $f(x) = \begin{cases} -1, & 0 < |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ 1, & |x| > 1. \end{cases}$  18.  $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$
19. 1. 20. 1. 21.  $-3$ . 23. 6. 24.  $f'(a) = 0$ , 取极小值. 25.  $a = 0$ ,  $b = 2$ . 26.  $\frac{1}{e}$ . 27.  $f'(x) = \begin{cases} \cos x, & x > 0, \\ \text{不存在}, & x = 0, \\ 2, & x < 0. \end{cases}$  28.  $f'(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} - \frac{|x|}{1+x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$  29.  $n = 3$ . 30. (1)  $(1+2x)e^{2x}$ ;

- (2)  $\arcsin \frac{1}{4}$ ; (3)  $(-1)^n 4^n \cos 2x$ ; (4)  $y \left[ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right]$ ;  
 (5)  $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ; (6)  $-4 \cot 2x \cdot \csc^2 2x$ ; (7)  $-\frac{1}{x^2} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1}{1+x} + \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)$ ;  
 (8)  $x^{\tan x} \left( \sec^2 x \ln x + \frac{\tan x}{x} \right)$ ; (9)  $\frac{(1+y^2)e^y}{1-x(1+y^2)e^y}$ ; (10)  $-4 \cdot 6!$ . 31.  $y = x - 1$ . 32.  $a = 1, b = 1$ . 33.  $-1$ . 34. (提示) 构造辅助函数应用罗尔定理. 37.  $0 < a < \frac{1}{e}$  时两个根,  $a = \frac{1}{e}$  时一个根,  $a > \frac{1}{e}$  时无根. 41. (提示) 对  $f(x)$  与  $x^2$  应用柯西中值定理. 42. (提示) 对  $f(x)$  与  $e^x$  应用柯西中值定理, 再对  $f(x)$  应用拉格朗日中值定理. 43. (提示) 用反证法, 应用零点定理和罗尔定理. 44. (提示) 将  $f(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  展为 2 阶泰勒展式, 后令  $x = 0$ ,  
 1. 45. (提示) 三次应用拉格朗日中值定理. 46.  $x = \sqrt[n]{n!}$  为极大值点.  
 47.  $y \left( \frac{1}{\sqrt{e}} \right) = -\frac{1}{2e}$  为极小值,  $\left( \frac{1}{\sqrt{e^3}}, -\frac{3}{2e^3} \right)$  为拐点. 48.  $(0, +\infty)$ , 在  $(0, e)$  上单调增, 在  $(e, +\infty)$  上单调减,  $\frac{1}{e}$  为极大值, 在  $(0, e^{\frac{3}{2}})$  上为凸, 在  $(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$  上为凹, 拐点为  $\left( e^{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2} e^{-\frac{3}{2}} \right)$ ,  $x = 0$  为铅直渐近线,  $y = 0$  为水平渐近线.  
 49.  $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty)$ , 在  $(-\infty, -1)$  与  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  上单调增, 在  $(-\infty, -1)$  上为凹, 在  $(-\frac{1}{2}, +\infty)$  上为凸,  $x = -1$  与  $x = -\frac{1}{2}$  是垂直渐近线,  $y = \ln 2$  是水平渐近线. 50. (1)  $x = 0, y = \frac{\pi}{2}, y = -\frac{\pi}{2}$ ; (2)  $x = 1, y = \frac{1}{2}x + 1$ ; (3)  $x = \pm 1, y = x$ .

## 试题二

1.  $x \ln x + 1$ . 2.  $\frac{1}{8x} - \frac{1}{4x} \ln(2x) + C$ . 3. (1)  $\frac{1}{15}(x-4)^{15} + \frac{3}{7}(x-4)^{14} + \frac{9}{13}(x-4)^{13} + C$ ; (2)  $(x-1) \ln(1+\sqrt{x}) + \sqrt{x} - \frac{x}{2} + C$ ; (3)  $\frac{1}{16}x + \frac{1}{64} \sin 2x - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{192} \sin 6x + C$ ; (4)  $\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - \sqrt{1-x^2} + C$ ;

- (5)  $-2\arctan \sqrt{1-x} + C$ ; (6)  $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x^2}\right| + C$ ;  
 (7)  $-x + \sqrt{2}\arctan(\sqrt{2}\tan x) + C$ ; (8)  $\frac{1}{2}x\tan^2 x - \frac{1}{2}\tan x + \frac{1}{2}x + C$ ;  
 (9)  $\ln(x+a)\ln(x+b) + C$ ; (10)  $\frac{1}{4}(\arcsin x)^2 + \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{1-x^2}\arcsin x - \frac{1}{4}x^2 + C$ ;  
 (11)  $\frac{1}{2}(x^2-1)\arctan\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + C$ ; (12)  $\frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$ ;  
 (13)  $2\sqrt{x-2}\ln x - 4\sqrt{x-2} + 4\sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}} + C$ ; (14)  $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$ ;  
 (15)  $-\frac{1}{x}\operatorname{arccot} x - \ln\frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}(\operatorname{arccot} x)^2 + C$ ;  
 (16)  $\frac{xe^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) + C$ ; (17)  $\frac{1}{x}(1+\ln x) + \ln x + C$ ;  
 (18)  $\frac{x^2}{x^2-\ln x} + C$ . 4. (1)  $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}$ ; (2) 0; (3)  $\frac{1}{2}\ln(2\sqrt{5}-3)$ ; (4)  $\frac{1}{2}(\sin 1 + \cos 1 - 1)$ ; (5)  $\sqrt{2}-2 + \frac{\pi}{4}$ ; (6)  $-\frac{2}{3}$ ; (7)  $\frac{a}{2}$ ; (8)  $\frac{4}{3}$ ; (9)  $\frac{16}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ ; (10)  $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ ; (11)  $\frac{1}{2}\ln 2$ ; (12)  $\frac{3}{16}\pi$ . 5.  $I(1)=0$  为极大值. 6. 0.  
 7.  $y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$  为最小值, 无最大值. 8. 最大值为 0, 最小值为  $-\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ . 9.  $a=-3$ . 10.  $\frac{1}{b-a}f'(b) - \frac{1}{(b-a)^2}[f(b)-f(a)]$ . 11.  $a=\frac{1}{4}$ ,  $b=1$ . 12.  $2f(x)$  ( $a < x < b$ ); 0 ( $a \leq x$  或  $x \geq b$ ). 13.  $0 \leq t \leq 2$  时  $S(t) = 16t^2 - \frac{1}{3}t^6$ ,  $2 \leq t \leq 5$  时  $S(t) = \frac{t^6}{3} - 16t^2 + \frac{256}{3}$ . 14.  $\frac{64}{3}$ . 15.  $\frac{3}{4}\sqrt{3}, \frac{3}{4}(\pi - \sqrt{3})$ . 16.  $\frac{1}{32}(\pi^2 - 4)$ . 17.  $\frac{5}{4}\pi a^2$ . 18. (提示) 应用零点定理. 19.  $\frac{\pi^2}{8} - 1, \frac{1}{48}\pi^4 - \frac{1}{8}\pi^2$ . 20.  $4\pi^2$ . 21.  $2\pi$ . 22.  $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2}-1)$ . 23.  $\frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}) + \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{17}) + 2 + \sqrt{5} + \sqrt{17}$ . 24.  $\frac{5}{2}\pi$ . 25.  $\frac{8}{35}\pi a^3$ . 27.  $\frac{1}{2}\ln 3$ . 28. (1)  $\frac{1}{4}\ln 2$ ; (2)  $n!$ ; (3)  $(\sqrt{b}-\sqrt{a})\sqrt{\pi}$ ; (4)  $\frac{1}{2}(1+\ln 2)$ . 29. (1) 收敛; (2) 发



散;(3) 收敛;(4) 收敛. 30. (1) 仅当  $\alpha < 1, \beta > 1$  或  $\alpha > 1, \beta < 1$  时收敛;(2) 仅当  $\lambda < 1$  且  $\mu < 1$  时收敛;(3) 仅当  $-2 < \mu < \lambda - 1$  时收敛;(4) 仅当  $1 < p < 1 - q$  时收敛;(5) 仅当  $\alpha > 0, \beta > -1$  时收敛;(6) 仅当  $\alpha - 2 < \beta < 1$  时收敛.

$$31. (1) \frac{15}{8}\pi; (2) 3; (3) \frac{\pi}{4}; (4) \frac{1}{100!}(99!)^2\pi.$$

### 试题三

1. (1)  $\sqrt{97-36\sqrt{3}}$ ; (2)  $\sqrt{14}$ ; (3)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (4)  $\frac{\pi}{3}$ ; (5)  $\frac{\pi}{4}, 1$ ;  
 (6)  $-5[a, b, c]$ ; (7)  $-\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\sqrt{3}$ ; (8)  $\lambda = 2$  或  $-2$ . 2.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 3.  $\frac{1}{2}\sqrt{77}$ .  
 4.  $\frac{5}{2}$ . 5.  $2x + y - z = 2$ . 6.  $2x - 3y - 4z - 8 = 0$ . 7.  $5x - y + z = 3$ .  
 8.  $\begin{cases} x + z = 0, \\ x - y - z = 0, \end{cases} (1, 2, -1)$ . 9.  $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ .  
 10.  $\begin{cases} x - 5y - 4z + 19 = 0, \\ x - y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$  11. 2. 12.  $(-2, -5, -1)$ . 13. 平行.  
 14.  $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ . 15.  $x = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}$ . 16.  $\frac{x-2}{6} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ . 17.  $(x-z)^2 + (y-2z) = 1$ . 18.  $(2y+z+1)^2 + 4(x+z)^2 + (x-2y-1)^2 = 36$ . 19.  $x^2 - y^2 - 2xz + 2yz + x + y - 2z = 0$ . 20.  $\begin{cases} 2y = x^2 + y^2, \\ z = 0. \end{cases}$  21.  $\frac{4}{3}\sqrt{143}\pi$ .  
 22.  $y = 1 - x^2 - z^2$ . 23.  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ . 24.  $x + 4y + 6z = -21$  或  $x + 2z = -7$ . 25.  $e^2$ . 26. 连续, 可偏导, 不可微. 27. 连续, 可偏导, 不可微.  
 28. 连续, 可偏导, 可微, 不连续可微. 29. (1)  $12, \arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$ ; (2)  $y^2(1 + xy)^{y-1}, z\left[\ln(1+xy) + \frac{xy}{1+xy}\right]$ ; (3)  $x^ny(1+\ln x) + z^xz\ln z, y^yz(1+\ln y) + x^yx\ln x, z^zx(1+\ln x) + y^zy\ln y, dx + dy + dz$ ; (4)  $3x^2f - 2yf', xf'$ ; (5)  $(\varphi + x\varphi')f'_1 + 2(x + \varphi\varphi')f'_2$ ; (6)  $2x, 2x - \sin 2x$ ; (7)  $\frac{ydx - xdy}{|y|\sqrt{y^2 - x^2}} + 2zdz$ ;  
 (8)  $\frac{-x}{y(1+x^2)\ln^2(xy)} + \frac{\ln(1+x^2)}{xy\ln^3(xy)}$ ; (9)  $f'', f''\varphi'^2 + f'\varphi''$ ; (10)  $\frac{z}{y^2}$ ;

$$(11) f'(x+y) + y(f''(xy) + f''(x+y)); (12) f''_{xx} + \frac{2}{\varphi'(y)} f''_{xy} + \frac{1}{(\varphi'(y))^2} f''_{yy} - f'_{xy} \frac{\varphi''(y)}{(\varphi'(y))^3}; (13) e^x(f(x) - f(x-y) + f'(x-y)). \quad 30. xy.$$

$$31. \frac{1}{ye^x + 1}, -\frac{ye^x}{(1 + ye^x)^3}. \quad 32. \frac{1}{e^x - 1}, \frac{e^x}{(1 - e^x)^3}. \quad 33. \frac{1}{f'_3}((f'_1 + f'_2 +$$

$$f'_3)dx - (f'_2 + f'_3)dy). \quad 34. \frac{2x}{f'_1 - 2z}dx + \frac{2y - f + \frac{z}{y}f'_1}{f'_1 - 2z}dy.$$

$$35. \frac{(y+z)(1+z)e^x + (y-x)(1+x)e^y}{(y+z)^2(1+z)e^x}dx + \frac{(y-x)(1+y)e^x - (x+z)(1+z)e^y}{(y+z)^2(1+z)e^x}dy.$$

$$36. \frac{z-x}{y-z}, \frac{y-x}{z-y}. \quad 37. 0, -1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}. \quad 38. 2xf'_1 + 2e^{2x}f'_2 - 2ze^x \frac{\varphi'_1}{\varphi'_2} f'_3.$$

$$39. (\varphi(1) - \varphi'(1))(x-1) + (\psi'(-1) - 1)(y+1) + (\varphi'(1) - \psi'(-1))(z-1) = 0, \frac{x-1}{\varphi(1) - \varphi'(1)} = \frac{y+1}{\psi'(-1) - 1} = \frac{z-1}{\varphi'(1) - \psi'(-1)}. \quad 40. x + 4y + 6z =$$

$$\pm 29. \quad 41. (1) 1 \pm \sqrt{3}; (2) \frac{\sqrt{2}}{3}; (3) \frac{x^2 + 2yz}{x^2 + y^2 + z^2}; (4) \frac{22}{\sqrt{14}}; (5) x_0 + y_0 + z_0,$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \quad 42. (x_0, y_0, z_0), \text{其中 } x_0 = 3\left(1 - \frac{4}{\sqrt{11}}\right), y_0$$

$$= \frac{4}{\sqrt{11}} - 1, z_0 = \frac{4}{\sqrt{11}}. \quad 43. (x_0, y_0, z_0), \text{其中 } x_0 = \frac{a}{a}, y_0 = \frac{a}{b}, z_0 = \frac{a}{c},$$

$$a = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}. \quad 44. \frac{1}{\sqrt{a}}x + \frac{1}{\sqrt{b}}y + \frac{1}{\sqrt{c}}z = 3, a = 1, b = \frac{1}{4}, c = \frac{1}{9}.$$

#### 试题四

$$1. (1) \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx; (2) \int_1^2 dy \int_1^2 f dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f dx; (3) \int_{-1}^0 dy \int_0^{\frac{1}{2}(1-y)} f dx + \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}(1+y)}^{\frac{1}{2}(1+y)} f dx; (4) \int_0^a dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^a f dy + \int_a^{2a} dx \int_{x-a}^a f dy; (5) \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f dy; (6) \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{1-\sqrt{1-x^2}} f dy.$$

$$2. (1) \frac{1}{2}; (2) \frac{11}{30}; (3) \frac{11}{40}; (4) \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1); (5) \frac{5}{2}\pi; (6) \frac{45}{32}\pi a^4; (7) \frac{1}{2};$$

$$(8) 4a^3. \quad 3. 1. \quad 4. \frac{1}{4}\left(\frac{1}{e} - 1\right). \quad 5. \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta f(\tan \theta) d\theta. \quad 6. \frac{20}{3}.$$

7.  $\frac{1}{11}$ . 8.  $\frac{1}{3}(\sqrt{b}-\sqrt{a})(\sqrt{n}-\sqrt{m})(a+b+\sqrt{ab}+n+m+\sqrt{nm})$ . 9.  $\frac{\pi}{2}$ .
10. (1)  $\frac{83}{21}\pi$ ; (2)  $\pi(e-2)$ ; (3)  $\frac{1}{60}\pi$ ; (4)  $\pi(2\ln 2 - \frac{5}{2})$ ; (5)  $\frac{14}{5}\sqrt{3}\pi$ ; (6)  $\frac{59}{480}\pi R^3$ ; (7)  $\frac{1}{8}\pi a^4$ ; (8)  $8\pi$ . 11. (1)  $\int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_x^z f dy$ ; (2)  $\int_a^b dx \int_a^x dz \int_z^x f dy$ ; (3)  $\int_a^b dz \int_z^b dy \int_y^b f dx$ ; (4)  $\int_0^{\frac{R}{2}} dz \int_0^{\sqrt{2k-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{2k-y^2-z^2}} f dx + \int_{\frac{R}{2}}^R dz \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} f dx$ .
12.  $2a^2$ . 13.  $\pi R^2(2 - \frac{R}{a})$ ,  $R = \frac{4}{3}a$ . 14.  $336\pi, 20\pi + \frac{2}{3}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})\pi$ . 15.  $\frac{3}{35}$ . 16. (1)  $\sqrt{2} + \frac{1}{2}e$ ; (2)  $\frac{1}{3}$ ; (3)  $-\frac{1}{2e}$ ; (4)  $1-e$ ; (5)  $\frac{3}{4}\pi - e^2 - 1$ ; (6)  $-a(2\pi a + c)$ ; (7)  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}a^2\pi$ ; (8) 0. 17.  $\frac{3}{2}\sqrt{3}\pi$ . 18.  $2\lambda s - f(d) + f(c)$ . 19.  $S + 9e^4 - e^2 + 6$ . 20. 0. 21.  $a = \frac{1}{2}, b = 0, I = \frac{1}{2}x_1y_1^2$ .
22. (1)  $\pi h^4(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ ; (2)  $4\pi$ ; (3)  $2\pi R \ln \frac{R}{h}$ ; (4)  $\pi$ ; (5)  $9\pi$ ; (6)  $\pi R^4 h$ ; (7)  $\frac{3}{4}\pi R^4$ ; (8) 0; (9)  $\frac{4}{a}bc\pi$ ; (10)  $\frac{8}{3}c\pi R^3$ . 23.  $n = 3, -\frac{79}{5}$ . 24.  $u = x^2y^2z + C$ . 25.  $a = 1, b = 1, c = 1, u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 2z^2) + xyz + C$ ; 或  $a = 4, b = -2, c = 4, u = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xyz + C$ . 26.  $2\pi a^2 h$ . 28.  $0, rf''(r) + 4f'(r) + \frac{2}{r}f(r)$ .

### 试题五

1. (1) 发散; (2) 收敛; (3) 收敛; (4) 绝对收敛; (5) 条件收敛; (6) 绝对收敛; (7) 发散; (8) 发散. 2. (1)  $0 < q \leq 1$  时发散,  $q > 1$  时收敛; (2)  $p > 1$  时绝对收敛,  $0 < p \leq 1$  时条件收敛,  $p \leq 0$  时发散; (3)  $p > 1$  时绝对收敛,  $0 \leq p \leq 1$  时条件收敛,  $p < 0$  时发散; (4)  $0 < a \leq 1$  时发散,  $a > 1$  时收敛. 3. (1)  $[-1, 1)$ ; (2)  $(-2, 4)$ ; (3)  $(0, +\infty)$ ; (4)  $(\frac{1-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$ .
4. (1)  $(-\sqrt{2}, \sqrt{2}), f(x) = -\ln(1 - \frac{x^2}{2})$ ; (2)  $[-1, 1], f(x) = (1-x)\ln(1-x)$

- $x) + x$  ( $-1 \leq x < 1$ ),  $f(1) = 1$ ; (3)  $[-1, 1]$ ,  $f(x) = -2x \arctan x + \ln(1 + x^2)$ ; (4)  $(0, 2)$ ,  $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}$ ; (5)  $(-1, 1)$ ,  $f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$  ( $|x| < 1, x \neq 0$ ),  $f(0) = 0$ ; (6)  $[-1, 1]$ ,  $f(x) = x \ln \frac{1+x}{1-x} + \ln(1-x^2)$  ( $|x| < 1$ ),  $f(\pm 1) = \ln 4$ .
- 5.** (1)  $\frac{3}{2}$ ; (2)  $\frac{1}{2}\sqrt{e} + 2$ .
- 6.** (1)  $\ln 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \left( (-1)^{n+1} - \frac{1}{3^n} \right) x^n$ ,  $(-1, 1]$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} [2(-1)^{n+1} - 1] x^n$ ,  $(-1, 1)$ ; (3)  $-\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (-1)^{n+1} + \frac{1}{2^n} \right) \frac{1}{n} x^n$ ,  $(-1, 1]$ ; (4)  $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{-1}{2^{n+1}} + (-1)^{n+1} \right) x^n$ ,  $(-1, 1)$ ; (5)  $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n$ ,  $(-1, 1)$ ; (6)  $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2n(2n-1)} x^{2n}$ ,  $[-1, 1]$ .
- 9.**  $(-1, 1)$ .
- 10.**  $R = 1$ .
- 11.** (1)  $y = C \exp\left(-\frac{x^2}{y^2}\right)$ ; (2)  $x \exp\left(\cos \frac{y}{x}\right)$ ; (3)  $y^2 - x^2 = Cy^3$ ; (4)  $y = C \cos x + \sin x$ ; (5)  $x^2 y^2 (C - x^2) = 1$ ; (6)  $x = Cy^2 + \frac{1}{2}y^4$ ; (7)  $y = Cx + \frac{1}{2}xy^2$ ; (8)  $x^3 y^2 + e^x (x^2 - 2x + 2) = C$ ; (9)  $y + \sqrt{y^2 - 4x^2} = Cx^2$  (或  $= C$ ); (10)  $\tan(x - y + 1) = x + C$ .
- 12.** (1)  $y = \ln(C_1 x + C_2)$ ; (2)  $y = -\frac{1}{2}x^2 - C_1 x + C_1^2 \ln|x - C_1| + C_2$ ; (3)  $\ln\left|\frac{y}{C_1 + y}\right| = C_1(x + C_2)$ .
- 13.** (1)  $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{2}(x^2 + 2x)e^{2x}$ ; (2)  $y = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) - \frac{1}{4}x e^x \cos 2x$ ; (3)  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + e^x \left[ \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25}\right) \cos x + \left(\frac{2}{5}x - \frac{14}{25}\right) \sin x \right]$ ; (4)  $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}e^x + 2\sin x - \cos x$ ; (5)  $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{10}e^x (\sin x + 2\cos x)$ ; (6)  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4}x \cos 2x + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x^2 \sin 2x - \frac{1}{32}x \cos 2x$ ; (7)  $y = e^{-x} (C_1 x + C_2) + C_3 e^x + \frac{1}{50}(\cos 2x + 2\sin 2x) - \frac{1}{2}$ .
- 14.**  $k \neq 1$  时

$$y = e^{kx}(C_1x + C_2) + \frac{1}{(1-k)^2}e^x; k=1 \text{ 时 } y = e^x(C_1x + C_2) + \frac{1}{2}x^2e^x. \quad 15. A$$

$$= -2, \frac{2x-1}{2y^2} - \frac{1}{x} = C. \quad 16. y = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{x^3} + x^2. \quad 17. (1) \text{ (提示) 分}$$

别就特征根的三种情况先证其特征根或特征根的实部小于零; (2) (提示) 应用 (1) 证 (2). \quad 18. a = -3, b = 2, f(x) = 6e^{-x}, y = C\_1e^{2x} + C\_2e^x + e^{-x}.

$$19. y^{(5)} - 2y^{(4)} + 3y^{(3)} - 2y'' + 2y' = 4(x-1), y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x + e^x(C_4\cos x + C_5\sin x) + x^2. \quad 20. y^{(7)} + y^{(6)} + 2y^{(5)} + 2y^{(4)} + y^{(3)} + y'' = 8e^x, \\ y = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + (C_4 + C_5x)\cos x + (C_6 + C_7x)\sin x + e^x.$$

$$21. x < 0 \text{ 时, } y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} - xe^{2x}; x \geq 0 \text{ 时, } y = C_1e^{2x} + \left(C_2 - \frac{1}{2}\right)e^{3x} +$$

$$\frac{1}{2}e^x. \quad 22. y = \sqrt{x}\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right) + C_2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\right)\right] + \frac{1}{3}x^2. \quad 23. x =$$

$$C_1\cos t - C_2\sin t + \frac{1}{2}t\cos t - \frac{1}{2}\sin t, y = C_1\sin t + C_2\cos t + \frac{1}{2}t\sin t. \quad 24. x$$

$$= C_1e^t + C_2e^{3t} + e^t(2\cos t - \sin t), y = C_1e^t - C_2e^{3t} + e^t(3\cos t + \sin t).$$

$$25. xy = C. \quad 26. y = \frac{2}{\sqrt{x}}. \quad 27. f(x) = \frac{-1}{1+x}. \quad 28. y = e^{-\sin x}(C + F(x)),$$

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt. \text{ 当 } k=0 \text{ 时, 所有特解以 } 2\pi \text{ 为周期, } k \neq 0 \text{ 时所有特解不以 } 2\pi$$

为周期. \quad 29.  $f(x) = 8e^{-x} - 7e^{-2x} + (3x^2 - 6x)e^{-x}$ . \quad 30. (提示) 原式分别对  $x, y$  求二阶导数导出  $f(x)$  满足微分方程  $f'' + kf = 0 (k \neq 0)$ .  $k < 0$  时  $f(x) = e^{\sqrt{-k}x} + e^{-\sqrt{-k}x}$ ;  $k > 0$  时  $f(x) = 2\cos\sqrt{k}x$ .

